

УДК 510(075.8)

Т 52

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ
МИНИСТРЛІГІ

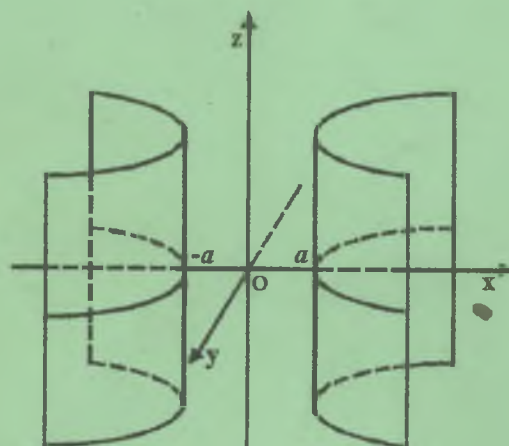
АЛМАТЫ ТЕХНОЛОГИЯЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА ЖӘНЕ ФИЗИКА КАФЕДРАСЫ

Д.Б.Токбергенов, Г.Қ.Үрістемова

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА

(Математика 1)

104.

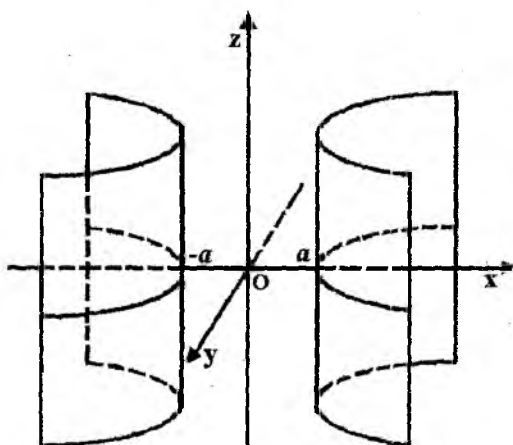


Алматы, 2010

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ
МИНИСТРЛІГІ
АЛМАТЫ ТЕХНОЛОГИЯЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА ЖӘНЕ ФИЗИКА КАФЕДРАСЫ

Д.Б.Токбергенов, Г.Қ.Үрістемова

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА
(Математика 1)



Алматы, 2010

ӘӘЖ 510(075.8) 1

ББК 22.1 я73

Т 51 Токбергенов Д.Б., Үрістемова Г.Қ.

Жоғары математика. (Математика 1). – Алматы: АТУ, 2010 – 177 б.

ISBN 978-601-263-102-9

Ұсынылып отырған оқу құралында сызықты алгебра, аналитикалық геометрия, математикалық анализге кіріспе, бір және көп айнымалы функцияларды дифференциалдық есептеулері қарастырылған, яғни бұл техникалық жоғары оқу орнында бірінші жарты жылдықта оқылатын оқу бағдарламасына сәйкес келеді.

ӘӘЖ 510(075.8)

ББК 22.1 я73

Пікір жазғандар:

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің математикалық анализ кафедрасының профессоры Ж.А.Тоқыбетов;

Алматы технологиялық университетінің жоғары математика кафедрасының меңгерушісі, ф.-м.ғ.д., профессор Т.С.Көшеров.

Баспаға ұсынған жоғары математика және физика кафедрасы (№10 хаттама, 4.06.2010 ж.) және Алматы технологиялық университетінің ғылыми кеңесі (№1 хаттама, 1.10.2010 ж.)

ISBN 978-601-263-102-9

© Алматы технологиялық университеті, 2010

КІРІСПЕ

Ұсынылып отырған оқулық Алматы технологиялық университетінің студенттеріне бірінші жарты жылдықта оқылатын дәрістер негізінде жазылған. Оқулық төрт тараудан тұрады. Бірінші тарауда сызықты алгебра және аналитикалық алгебра негіздері қарастырылған. Екінші тарау математикалық анализге арналады, үшінші тарауда бір айнымалы функцияны дифференциалдық есептеу, төртінші тарауда кәп айнымалы функция қарастырылған. Оқулық негізінен инженерлерге арналғандықтан кейбір теоремалар мен салдарлар дәлелсіз немесе анықтама ретінде берілген.

Бұл оқулық соңғы кездердегі жоғары математика пәніне арналған мемлекеттік тілде көптеп шыға бастаған оқулықтарды толықтырады деп есептейміз.

І тарау. СЫЗЫҚТЫ АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ НЕГІЗДЕРІ

§1. Екінші ретті анықтауыштар

Бізге a_{11}, a_{12}, a_{21} және a_{22} нақты сандар берілсін.

Анықтама. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ саны екінші ретті анықтауыш (немесе детерминант) деп аталынады да, мына түрде жазылады:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.1)$$

Мұндағы a_{11}, a_{12}, a_{21} және a_{22} сандары *анықтауыштың элементтері* деп аталынады. Анықтауыштың бірінші жолы - a_{11}, a_{12} , екінші жолы - a_{21} және a_{22} , бірінші бағана - a_{11}, a_{21} , екінші бағана - a_{12}, a_{22} элементтерден тұрады. (1.1) формула арқылы екінші ретті анықтауыштың мынандай қасиеттерін оңай дәлелдеуге болады.

1-қасиет. Анықтауыштың жолдарын сәйкес бағандарымен алмастырсақ, онда оның шамасы өзгермейді, яғни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2-қасиет. Егер анықтауыштың жолдарының (бағандарының) орнын ауыстырсақ, онда оның таңбасы өзгереді, яғни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

3-қасиет. Егер анықтауыштың кейбір жолының немесе бағанының барлық элементтері нөл болса, онда анықтауыштың шамасы нөлге тең.

$$\text{Мысал. } \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{12} = 0.$$

4-қасиет. Егер анықтауыштың кейбір жолының (бағанасының) элементтерін k санына көбейтсек, онда анықтауыштың шамасы да осы k санына көбейтіледі.

$$\text{Мысал. } \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Яғни, жолының немесе бағанының ортақ көбейткішін анықтауыштың таңбасының алдына шығаруға болады.

5-қасиет. Егер анықтауыштың екі жолдарының (екі бағандарының) элементтері пропорционал болса, онда анықтауыш нөлге тең.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12} - ka_{11}a_{12} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}ka_{21} - a_{21}ka_{11} = 0.$$

6-қасиет. Анықтауыштың қайсібір жолының (бағанасының) элементтеріне басқа жолдың (бағанның) сәйкес элементтерін бірдей k санына көбейтіп қосқаннан, анықтауыштың шамасы өзгермейді, яғни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{12} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$$

7-қасиет. Егер анықтауыштың қайсібір жолы (бағаны) екі санның қосындысынан тұрса, онда мына теңдіктер дұрыс

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

§2. Үшінші және n -ші ретті анықтауыштар

Анықтама.

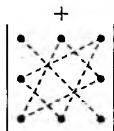
$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (2.1)$$

саны үшінші ретті анықтауыш (детерминант) деп аталады да, мына түрде жазылады

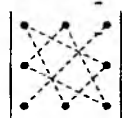
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

Мұндағы a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) сандары анықтауыштың элементтері, бірінші индекс i жолдың нөмірін, ал екінші индекс j осы элемент тұрған бағанның нөмірін көрсетеді. Сонымен a_{ij} элементі i -жолмен j -бағанның қиылысуында тұрады.

a_{11}, a_{22}, a_{33} элементтері анықтауыштың бас диагоналын, ал a_{13}, a_{22}, a_{31} элементтері екінші диагоналын құрайды. (2.2) анықтауыш мына сұлба бойынша жіктелінеді:



1-сурет



2-сурет

Бұл сұлбаны үшбұрыштар тәсілі деп атайды. (2.1)-дегі оң үш мүше 1-сурет бойынша есептелінеді. Бұлар бас диагоналдардың бойындағы элементтердің көбейтіндісі және табандары осы бас диагональға параллель екі тең бүйірлі үшбұрыштың төбесіндегі элементтердің көбейтіндісі. Ал, теріс үш мүше екінші диагональ бойындағы элементтердің және табандары осы диагональға параллель болатын екі тең бүйірлі үшбұрыштардың төбесіндегі элементтердің көбейтіндісінен тұрады. (2-сурет). (2.1)-дегі әрбір мүшеде әрбір жолдың және әрбір бағанның өкілдері бар және әрбір мүшедегі элементтердің бірінші

индекстері өсу жолымен орналасқан. Ал бағандарының нөмірлері мына кестелер арқылы жазылған.

$$\left. \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right\}, \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right\}. \quad (2.4)$$

Бұл (2.3) және (2.4) кестелер 1, 2, 3 сандардың барлық мүмкін орын алмастырулары. n элементтен $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ орын алмастырулар құруға болады, ал үш элементтен $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ орын алмастырулар құруға болады. Бізге $a_1, a_2, \dots, a_n$ элементтері берілсін. Егерде осы элементтерден құрылған орын алмастырудағы екі элементтің a_i және a_k нөмірлерінің үлкені кішісінің алдында тұрса (яғни $i > k$), онда екі элемент өзара инверсия немесе ретсіздік құрады дейміз.

Мысал. $[2, 3, 1, 4, 7, 3, 6] = 2 + 0 + 3 + 1 + 0 + 1 + 0 = 7$

Алдымен 1-ді сызамыз, оның алдында 1-ден үлкен 2 және 5 сандары бар, сондықтан оның инверсиясы 2-ге тең, содан кейін 2-ні сызамыз оның алдында ешқандай үлкен сан жоқ, сондықтан оның инверсиясы нөлге тең т.б. Сонымен берілген орын алмастырудың инверсиясы жетіге тең.

$$[1, 2, 3] = 0, \quad [2, 3, 1] = 2 + 0 + 0 = 2 \quad [3, 1, 2] = 1 + 1 + 0 = 2$$

$$[3, 2, 1] = 2 + 1 + 0 = 3 \quad [1, 3, 2] = 0 + 1 + 0 = 1 \quad [2, 3, 1] = 1 + 0 + 0 = 1$$

(2.3) кестедегі орын алмастырулардың инверсия сандары жұп, (2.4)-гі орын алмастырулардың инверсия сандары тақ. Осы инверсия ұғымын пайдаланып үшінші ретті анықтаушықа басқа анықтама береміз.

Анықтама. Үшінші ретті анықтаушы деп мынаған тең:

$$\Delta = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \quad (2.5)$$

Δ - санын айтамыз. Мұндағы $j = (j_1, j_2, j_3)$ негізі 1, 2, 3 элементтерден тұратын барлық мүмкін орын алмастырулар, $t(j)$ - деп $j = (j_1, j_2, j_3)$ орын алмастырулардың инверсия санын белгілейміз.

Анықтама. n -ші ретті анықтаушы немесе детерминант деп мына түрде жазылатын

$$\Delta = |a_{jk}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

және мына заңмен есептелінетін

$$\Delta = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad (2.7)$$

Δ - санын айтады.

Бұл қосынды негізгі орын алмастыруы $1, 2, 3, \dots, n$ болатын барлық мүмкін $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ орын алмастырулардан тұрады. $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ орын алмастырудың инверсия санын $t(j)$ деп белгілейміз. $(-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ анықтауыштың мүшесі деп аталады. n -ші ретті анықтауыштың $n!$ мүшесі бар. Үшінші және n -ші ретті анықтауыштар жоғарыдағы екінші ретті анықтауыштың жеті қасиетін де қанағаттандырады.

§3. Минорлар мен алгебралық толықтауыштар

Анықтама. n -ші ретті Δ -анықтауыштың a_{ik} элементінің M_{ik} **миноры** деп, Δ анықтауыштың i -ші жолын және k -шы бағанын сызып тастағаннан соң қалған $n-1$ -ші ретті анықтауышты айтады.

$$\text{Мысал. } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Осы Δ -ның 2-ші жолын 3-ші бағанын сызып тастағанда, екінші ретті M_{23} анықтауыш аламыз. Бұл a_{23} элементтің миноры.

Анықтама. n -ретті Δ анықтауыштың a_{ik} элементінің A_{ik} **алгебралық толықтауышы** деп, $(-1)^{i+k}$ таңбамен алынған оның минорын айтады, яғни

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

Жоғарыдағы мысалды қарастырамыз:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Осы ұғымдарды пайдаланып анықтауыштың келесі қасиеттерін дәлелдейік.

8-қасиет. (Лаплас формуласы). Анықтауыштың қайсібір жолының немесе бағанының элементтерін олардың сәйкес алгебралық толықтауыштарына көбейтінділерінің қосындысы анықтауыштың шамасына тең. Яғни

$$\Delta = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (3.2)$$

Бұл формулалар **Лаплас формулалары** деп аталады.

Дәлелдеу. Бұл қасиетті үшінші ретті анықтауыштың 3-ші жолы үшін дәлелдейік.

$$\text{Сонымен } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ берілсін.}$$

$$a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = \Delta$$

(3.1) қосындыны анықтауышты i -ші жолдың элементтері арқылы жіктеу, (3.2) қосындыны k бағанның элементтері арқылы жіктеу деп аталады.

Мысал 1.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}, \quad A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мысал 2.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Үшбұрышты анықтауыштың мәні бас диагоналдағы элементтердің көбейтіндісіне тең.

Мысал 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 7 = -6 + 3 + 28 = 25.$$

Бұл анықтауышты бірінші жолдың элементтері арқылы жіктедік.

9-қасиет. Анықтауыштың кайсібір жолының (бағанының) элементтерінің басқа жолдың (бағанның) сәйкес алгебралық толықтауышына көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең.

Дәлелдеуі. Анықтауыштың бір жолының элементтерін басқа жолдың алгебралық толықтауышына көбейтсек, онда көрсетілген жолдары тең анықтауыш аламыз. Ал екі жолының элементтері бірдей анықтауыш нөлге тең.

Мысал.

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = -a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = \\ = -a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{11}a_{12}a_{33} - a_{12}a_{13}a_{31} - a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{13}a_{31} = 0.$$

10-қасиет. Бізге $\Delta_1 = |a_{ik}|$ және $\Delta_2 = |b_{ik}|$ n -ші ретті анықтауыштар берілсін.

Екі Δ_1 және Δ_2 анықтауыштардың көбейтіндісі деп элементтері мына формуламен анықталатын

$$\gamma_{ik} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sk} \quad (3.3)$$

n -ретті анықтауышты айтады. Яғни

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \left| \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} \right| = \Delta.$$

Дәлелдеуі. Бұл қасиеттің екінші ретті анықтауыш үшін дұрыстығын көрсетейік.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix}.$$

Мұндағы, $\gamma_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$, $\gamma_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$, $\gamma_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$, $\gamma_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$.

(3.3) формула бойынша

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}b_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - b_{12}b_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \times (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \Delta_1 \cdot \Delta_2. \end{aligned}$$

Мысал. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_1 \cdot \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -3 + 8 + 6 & 2 + 9 & 2 + 2 + 3 \\ -6 + 12 + 2 & 4 + 3 & 4 + 3 + 1 \\ -6 + 8 + 2 & 4 + 3 & 4 + 2 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 7 \\ 8 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 7 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

§4. Матрицалар және оларға қолданылатын амалдар

1. Матрица ұғымы. m жолдан n бағаннан тұратын, тік бұрышты сандар кестесі $m \times n$ өлшемді матрица деп аталады да, мына жазулардың бірімен белгіленеді:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| = [a_{ij}],$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n$), сандары матрицаның элементтері деп аталады. Егер матрицаның жолдарының саны оның бағандарының санына тең болса, яғни $m=n$, онда матрицаны n -ші ретті квадрат матрица деп атайды. n -ші ретті

квадрат матрицаның $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементтері оның бас диагоналын, ал $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ - екінші диагоналын құрайды. Барлық элементтері нөлге тең квадрат матрицаны *нөлдік матрица* дейді де, O әрпімен белгілейді, яғни

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Бас диагоналының элементтерінен басқа элементтері нөлге тең квадрат матрицаны *диагоналды матрица* деп атайды:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Егер $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$ болса, онда матрицаны *бірлік матрица* деп атайды да E әрпімен белгілейді

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Бір бағаннан немесе бір жолдан тұратын матрицаны сәйкес бағана вектор немесе жол векторы деп атайды. Олардың түрі мынандай:

$$A_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad A_{1 \times n} = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Матрицаның элементтері вектордың координаттары деп аталады.

ЕСКЕРТУ. n -ші ретгі A квадрат матрицаның анықтаушы деп

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ санын айтады.}$$

Квадрат емес матрицаның анықтаушы жоқ.

Екі матрицаны $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ және $B_{m \times n} = [b_{ij}]$ бір-біріне тең дейміз, яғни $A_{m \times n} = B_{m \times n}$, егерде $a_{ij} = b_{ij}$, $(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ болса.

2. Матрицаға қолданылатын амалдар

- 1) Екі матрицаның $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ және $B_{m \times n} = [b_{ij}]$ қосындысы деп элементтері $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, болатын, $\tilde{N}_{m \times n} = [\tilde{a}_{ij}]$ матрицасын айтады, яғни $C = A + B$.

Матрицаларды қосудың мынандай қасиеттері бар:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = A$
4. $A - A = 0$

$A + X = B$ болатын тек бір X матрица бар, бұл матрица A және B матрицалардың айырымы деп аталады. Сонымен $X = B - A$. $A + X = 0$ теңдеудің шешімі $X = 0 - A$ A матрицаға қарама-қарсы матрица деп аталады, оны $-A$ деп белгілейді.

$$-A = [-a_{ij}]$$

- 2) $A = [a_{ij}]$ матрицаның $\alpha \in R$ санына көбейтіндісі деп $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$ матрицасын айтады.

Матрицаның сандарға көбейтудің мынандай қасиеттері бар:

1. $1 \cdot A = A$, $(-1) \cdot A = -A$, $0 \cdot A = 0$
2. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, $\alpha, \beta \in R$
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\alpha, \beta \in R$
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $\alpha \in R$

- 3) Матрицаны бағана векторға көбейту. $A_{m \times n}$ матрицаны X бағана векторға көбейту үшін, A матрицаның бағандар саны X вектордың координат сандарына тең болуы қажет. Онда A матрицаның X векторға көбейтіндісі $A \cdot X$ мына түрде жазылады

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Қорытындысында $Y = A \cdot X$ бағана вектор аламыз. Бұл вектордың координаттарының саны A матрицаның жолдарының санына тең, яғни

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot X = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

немесе

$$Y = A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n. \quad (4.3)$$

(4.3) формуладан, егер $X = O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ болса, онда $A \cdot X = O$.

Егерде $A = E$ болса, E - бірлік матрица, онда

$$E \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_2 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X.$$

Матрицаның векторға көбейтудің мынандай қасиеттері бар:

1. $A(\alpha X) = \alpha AX$, $\alpha \in R$
2. $A(X + Y) = AX + AY$, $\forall X, Y$ - бағана векторлар.

4) **Матрицаларды көбейту.** Екі матрицаны A және B -ны келісілген дейді, егер A матрицаның бағандарының саны B матрицаның жолдарының санына тең болса, яғни $A_{m \times n}$ және $B_{n \times k}$ болса. Тек екі келісілген матрицаларды бір-бірімен көбейтуге болады. $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ және $B_{n \times k} = [b_{ij}]$ матрицалардың

көбейтіндісі деп, элементтері мына формуламен анықталатын $c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}$

($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, k}$), $C_{m \times k} = A \cdot B$ матрицасын айтады.

Мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6+3 & 2+4+3 \\ 2+3+1 & 4+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Жалпы жағдайда $A \cdot B \neq B \cdot A$. Матрицаларды көбейтудің анықтамасынан мынандай қасиеттер шығады:

1. $AE = EA = A$
2. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$
3. $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$
4. $(AB)C = A(BC)$
5. $(A+B)C = AC + BC$
6. $A(B+\tilde{N}) = AB + AC$.

4) *Аударылған матрица.* A матрицаның жолдарын бағандарымен ауыстырғанда алынған A^T матрицаны аударылған матрица деп атайды, яғни

$$A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}] = [a_{ji}].$$

$$\text{Мысал. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Аударылған матрицаның қасиеттері:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

4-қасиетті дәлелдейік.

$$\text{Дәлелдеуі: } (AB)^T = \left[\sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} \right]^T = \left[\left(\sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} \right)^T \right] = \left[\sum_{s=1}^n a_{si} b_{js} \right] = \left[\sum_{s=1}^n b_{js} a_{si} \right] = B^T A^T.$$

Егер $A = A^T$ болса, A - матрицаны симметриялы дейді.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 2 & 3 \\ 2 & a_{22} & 5 \\ 3 & 5 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & a_{22} & 4 & 5 \\ 2 & 4 & a_{33} & 6 \\ 3 & 5 & 6 & a_{44} \end{bmatrix} \quad \text{симметриялы матрицалар.}$$

§5. Кері матрицалар

Квадрат матрицаны *өзгеше емес* дейді, егер оның анықтаушы нөлге тең болмаса.

A^{-1} матрицаны A матрицаға кері дейді, егер мына теңдік орындалса

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad (5.1)$$

Мұндағы E n -ші ретті бірлік матрица. Егер берілген матрицаның кері матрицасы бар болса, ол тек жалғыз.

Теорема. Квадрат A матрицаның кері матрицасы бар болуы үшін, оның *өзгеше емес* болуы қажетті және жеткілікті.

Қажеттілігі. A матрицаның кері матрицасы бар болсын. Онда (5.1) теңдіктен және анықтауыштың қасиеттерінен

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |E| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0.$$

Жеткіліктілігі. A матрицаның анықтауышы нөлге тең болмасын.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| \neq 0.$$

A матрицаның элементтеріне сәйкес алгебралық толықтауыштарынан тұратын матрица құрайық:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Осы матрицаның жолдарын бағандарымен алмастырып B қосалқы матрицаны аламыз

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A және қосалқы B матрицаны көбейтсек, мынадай матрица шығады

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^n a_{1s} A_{1s} & \sum_{s=1}^n a_{1s} A_{2s} & \dots & \sum_{s=1}^n a_{1s} A_{ns} \\ \sum_{s=1}^n a_{2s} A_{1s} & \sum_{s=1}^n a_{2s} A_{2s} & \dots & \sum_{s=1}^n a_{2s} A_{ns} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s=1}^n a_{ns} A_{1s} & \sum_{s=1}^n a_{ns} A_{2s} & \dots & \sum_{s=1}^n a_{ns} A_{ns} \end{pmatrix}.$$

Лаплас формуларынан және анықтауыштардың қайсібір жолдың элементтерінің басқа жолдың сәйкес алгебралық толықтауыштарына көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең деген анықтауыштың 9-шы қасиетінен мынаны аламыз:

$$AB = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = |A|E, \quad AB = |A|E \quad (5.2)$$

(5.2) -нің екі жағын сол жақтан A^{-1} матрицаға көбейтсек

$$A^{-1}AB = A^{-1}|A|E \Rightarrow E \cdot B = |A|A^{-1} \Rightarrow B = |A|A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} B. \quad (5.3)$$

Бұл A^{-1} матрица A матрицаға кері матрица. Сонымен A матрицаға кері матрицаны есептеу үшін, алдымен B қосалқы матрицаны құрып алып оның әрбір элементін $|A|$ санына бөлу керек.

Мысал. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $|A| = 5$.

Осы матрицаның кері матрицасын табу керек. Ол үшін A матрицаның әрбір элементтерінің алгебралық толықтауыштарын табамыз.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

§6. Матрицаның рангісі

Анықтама. Матрицаның рангісі деп, осы матрицаның нөлге тең емес минорларының ең үлкен ретін айтады.

Матрицаның рангісі $r(A)$ арқылы белгіленеді. Егер A матрицаның өлшемі $m \times n$ болса, онда $0 \leq r(A) \leq \min(m; n)$.

Матрицаны элементарлық түрлендіргенде оның рангісі өзгермейді. Матрицаны элементарлы түрлендіру деп:

- 1) матрицаның екі жолының (немесе бағандарының) орнын ауыстыруды;
- 2) матрицаның жолын (бағанасын) нөлге тең емес санға көбейтуді;
- 3) матрицаның бір жолына (бағанына) басқа жолдардың (бағандардың) сызықтық комбинациясын қосуды;
- 4) матрицаны аударылған матрицаға алмастыруды айтады.

Мысал. A матрицаның рангісін табу керек. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & -2 \end{bmatrix}$

Шешімі. Матрицаның рангісін табу үшін A матрицаға элементарлы түрлендіру жасаймыз.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{J_1 + J_2 \\ (-1)J_1 + J_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{3J_2 + J_3} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

Матрицаның екінші жолының элементтеріне бірінші жолдың элементтерін қостық және бірінші жолдың элементтерін -1 -ге көбейтіп үшінші жолдың элементтеріне қостық. Екінші матрицаның екінші жолын 3 -ке көбейтіп үшінші жолдың элементтеріне қостық. Элементтерінің барлығы нөл болғандықтан матрицаның үшінші жолын сызып тастадық. Соңғы матрицадан нөлге тең емес минордың ең үлкен реті екіге тең, яғни $r(A) = 2$.

§7. Сызықты тендеулер жүйесі

$x_1, x_2, \dots, x_n$ деген n белгісіздері бар m теңдеулерден тұратын сызықты жүйе деп, мынандай теңдеулер жүйесін айтады

[illegible]

Мұндағы a_{ij} ($i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$) теңдеулер жүйесінің коэффициенттері, b_i ($i=\overline{1,m}$) жүйенің бос мүшелері деп аталады. Жүйенің шешімі деп, осы жүйенің әрбір теңдеуін тепе-теңдікке айналдыратын кез келген $x_1, x_2, \dots, x_n$ n сандар жиынтығын айтады. Ең кемінде бір шешімі бар теңдеулер жүйесін *үйлесімді*, ал шешімі жоқ теңдеулер жүйесін *үйлесімсіз* деп атайды. Тек қана бір ғана шешімі бар жүйені *анықталған*, ал бірден артық шешімі бар жүйені *анықталмаған* деп атайды. Егер барлық $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ болса, онда (7.1) жүйе *біртекті*, ал ең болмағанда бос мүшелердің біреуі нөлге тең болмаса ол *біртекті емес* деп аталады. (7.1) жүйені матрица түрінде былай жазуға болады:

$$A \cdot X = B \quad (7.2)$$

мұндағы $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

A матрицасы жүйенің коэффициенттерінен құрылған негізгі матрица, X және B бағана векторлар. Олардың координаттары $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ге және бос мүшелерге тең. Мына матрицаны

(7.1) жүйенің кеңейтілген матрицасы деп атайды.

Кронекер-Капеллидің теоремасы. (7.1) тендеулер жүйесі үйлесімді болу үшін, оның негізгі матрицасы мен кедейтілген матрицасының рангтерінің тең болуы қажетті және жеткілікті.

(Дәлелдемейміз.)

Мысал. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ Осы жүйенің шешімдерінің бар немесе жоқтығын

зерттеу керек.

Ол үшін бұл жүйенің негізгі матрицасын құрамыз.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A) = 1$. Оның рангісі бірге тең. Осы жүйенің

кеңейтілген матрицасының рангісі 2-ге тең, шынында да

$$[A|B] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad r(A|B) = 2.$$

$r(A) \neq r(A|B)$, Кронекер-Капеллидің теоремасының шарты орындалмайды, олай болса жүйе үйлесімсіз. Яғни берілген тендеулер жүйесінің шешімі жоқ.

§8. Крамер әдісі

n белгісіздері бар n тендеулер жүйесін қарастырайық

[illegible]

Осы жүйенің негізгі матрицасының анықтауышы $|A| \neq 0$. (8.1) тендеулер жүйесі матрица түрінде былай жазылады:

$$A \cdot X = B \quad (8.2)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 30 + 18 + 3 - 18 - 5 - 18 = 10,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 12 - 5 + 18 - 3 - 20 = 20,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 10 - 9 + 15 - 9 - 6 = 10.$$

$$(8.5) \text{ формулаларды пайдаланып } x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{10}{10} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{20}{10} = 2, x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{10}{10} = 1.$$

Сонымен жүйенің шешімі $(1, 2, 1)$.

§9. Сызықты теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешу

Гаусс әдісі сызықты теңдеулер жүйесін шешудегі универсалды әдістердің бірі деп есептелінеді. Бұл әдіс кейде айнымалыларды біртіндеп жою әдісі деп те аталынады.

$$A \cdot X = B. \quad (9.1)$$

теңдеулер жүйесін қарастырайық. Мұндағы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

Осы (9.1) теңдеулер жүйесінің кеңейтілген матрицасының жолдарына элементарлы түрлендіру арқылы оны *сатылы* матрица түріне келтіруге болады. Мысалы, бір айнымалыны таңдап аламыз (көбінесе x_1) және оны осы айнымалының алдындағы коэффициенттерді және сол айнымалы бар теңдеуді шешуші деп атаймыз. Егер шешуші коэффициент бірден өзге болса, онда шешуші теңдеудегі барлық коэффициенттерді осы шешуші коэффициентке бөліп, қалған барлық теңдеулерден шешуші айнымалыны жоямыз. Содан кейін келесі шешуші айнымалыны таңдап аламыз (көбінесе x_2), шешуші теңдеуді шешуші коэффициентке бөлеміз және қалған теңдеулерден осы шешуші айнымалыны жоямыз. Осы процессгі әрі қарай жалғастырамыз. Осы процесс кезінде $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$ түріндегі теңдеу кездессе, мұндай теңдеуді немесе кеңейтілген матрицадағы осыған сәйкес барлығы нөлден тұратын жолды алып тастауға болады. Себебі, бұл теңдеуді кез келген $x_1, x_2, \dots, x_n$ сандар жиыны қанағаттандырады. $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$, ($b \neq 0$), түрдегі теңдеу немесе кеңейтілген матрицада барлық элементтері нөлден тұратын, бірақ соңғы

элементі нөл емес жол кездесуі мүмкін. Онда бұл теңдеудің сонымен қатар берілген теңдеулер жүйесінің шешімі жоқ, яғни жүйе үйлесімсіз.

Сонымен кеңейтілген матрицаның жолдарына элементарлы түрлендіру арқылы оны сатылы матрицаға келтіреміз:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2k} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{kk} & \dots & c_{kn} & d_k \end{array} \right) \quad (9.3)$$

Бұл матрицаға мынадай теңдеулер жүйесі сәйкес келеді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2k}x_k + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \dots \\ c_{kk}x_k + \dots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases} \quad (9.4)$$

мұндағы $k \leq m$, $a_{1i} \neq 0$, $c_{ii} \neq 0$, $i = \overline{2, k}$. Осы (9.4) теңдеулер жүйесінің соңғы теңдеуінен x_k белгісізді басқа $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ арқылы өрнектейміз. Содан кейін x_k -шы жүйенің соңғы теңдеудің алдыңғы теңдеуіне қойып x_{k-1} белгісізді $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ арқылы өрнектейміз, содан кейін $x_{k-2}, \dots, x_2, x_1$ белгісіздерді осылай табамыз. Сонымен $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ бос айнымалыларға кез келген мәндер беріп, жүйенің шексіз көп шешімдерін аламыз.

Е С К Е Р Т У. Егер сатылы матрица үшбұрышты болса, яғни $k = n$, онда берілген жүйенің тек қана бір шешімі болады. Соңғы теңдеуден x_n белгісізді тауып оны соңғы теңдеудің алдыңғы теңдеуіне қойып x_{n-1} , тағы солай жалғастырып $x_{n-2}, \dots, x_1$ -лерді табамыз.

Мысал.
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешу} \\ \text{керек.} \end{array}$$

Шешімі. Бұл жүйенің кеңейтілген матрицасын құрып, оған элементарлы түрлендірулер қолданамыз.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} (-4)J_1 + J_2 \\ (-2)J_2 + J_3 \\ (-4)J_1 + J_4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \end{array} \right] \begin{array}{l} J_2 : 3 \\ J_3 : 5 \\ J_4 : 5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)J_2 + J_3 \\ (-1)J_1 + J_4}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ . Осыдан } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

§10. Біртекті тендеулер жүйесі

Біртекті теңдеулер жүйесін қарастырайық

[illegible]

Бұл жүйені матрицалық түрде былай жазуға болады

$$A \cdot X = 0 \quad (10.2)$$

Мұндағы A (10.1) жүйенің негізгі матрицасы, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $O^r = (0, 0, \dots, 0)^T$. Бұл жүйе әрқашанда үйлесімді, себебі $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ жүйенің шешімдері.

Бұл нәлдік шешімді *мардымсыз* (тривиальное) шешім деп атайды.

Теорема. Біртекті теңдеулер жүйесінің нөлден өзге шешімі болуы үшін, негізгі A матрицаның рангі n санынан кіші болуы, *қажетті және жеткілікті*, яғни $(r(A) < n)$. Мұндағы n матрицаның бағандарының саны.

Қажеттілігі. (10.2) жүйенің нөлден де өзге шешімі болсын, яғни төмендегі теңдік орындалатын барлығы нөл емес $x_1, x_2, \dots, x_n$ бар болсын.

$$A \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = 0 \quad (10.3)$$

Бұл теңдік A матрицаның бағандарының сызықты тәуелділігін көрсетеді. Матрицаның рангісінің анықтамасы бойынша $r(A) < n$.

Жеткіліктігі. $r(A) < n$ болсын. Онда A матрицаның бағандары сызықты тәуелді, яғни барлығы нөлге тең емес $x_1, x_2, \dots, x_n$ сандар табылып (10.3) теңдік орындалады. Осыдан (10.2) жүйенің нөлден де өзге шешімі болатындығы шығады.

Салдар 1. Негізгі матрицасы $A_{n \times n}$ болатын $A \cdot X = 0$ жүйенің нөлден де өзгеше шешімі болуы үшін, $|A| = 0 \Leftrightarrow r(A) < n$ болуы қажетті және жеткілікті.

Салдар 2. Негізгі матрицасы $A_{n \times n}$ болатын $A \cdot X = 0$ жүйенің тек нөлдік шешімі болуы үшін, $|A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$ болуы қажетті және жеткілікті.

Мысал 1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ жүйесін шешу керек.

Бұл жүйенің негізгі матрицасының анықтауышы $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

Ал $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Олай болса $x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{0}{5} = 0$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{0}{5} = 0$.

Жүйенің шешімі $(0, 0)$.

Мысал 2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ Жүйені шешу керек.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$, $n = 3$. $r < n$ болғандықтан берілген жүйенің нөлден де

өзгеше шексіз шешімдері бар. Соларды табайық. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1$,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3 \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 2x_3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3.$$

Осыдан $x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{2x_3}{1} = 2x_3$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{3x_3}{1} = 3x_3$, x_3 -ке әртүрлі мәндер беріп жүйенің шексіз көп шешімін табамыз.

§11. Векторлар және векторларға қолданылатын сызықтық амалдар

1. Вектор ұғымы. Физика, механика және техника салаларында скалярлық және векторлық шамалар жиі кездеседі.

Өзінің сандық мәнімен толық анықталатын шамаларды *скалярлық шамалар* деп атайды. Скалярлық шамаларға мысалдар: аудан, ұзындық, көлем, масса, жұмыс, температура.

Векторлық шамалар өздерінің сандық мәндерімен және бағыттарымен анықталады. Векторлық шамаларға мысалдар: күш, жылдамдық, үдеу.

Вектор деп бас нүктесі A -да соңғы нүктесі B -да жататын бағытталған $\overline{AB}$ кесіндісін айтады. $\overline{BA}$ векторы (бас нүктесі B -да, ал соңғы нүктесі A -да) $\overline{AB}$ векторға қарама-қарсы вектор деп аталады. $\vec{a}$ векторына *қарама-қарсы вектор* $-\vec{a}$ деп белгіленеді.

$\overline{AB}$ вектордың *ұзындығы* немесе *модулі* деп кесіндінің ұзындығын айтады да оны $|\overline{AB}|$ деп белгілейді. Ұзындығы нөлге тең векторды *нөлдік вектор* деп атайды да $\vec{0}$ деп белгілейді. Нөлдік вектордың бағыты жоқ.

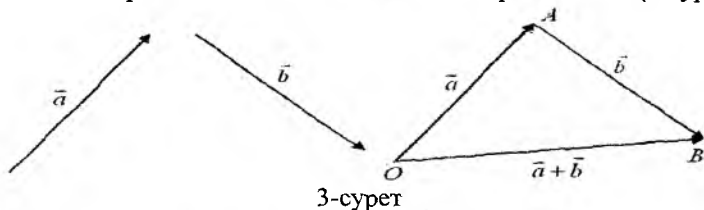
Ұзындығы бірге тең векторды *бірлік вектор* немесе *орто* деп атайды. $\vec{a}$ вектордың бірлік векторының бағыты осы вектормен бағыттас, оны $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{e}$ деп белгілейді.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын *коллинеарлы* дейді, егер олар бір түзудің бойында немесе параллель түзулерде жатса, онда оларды $\vec{a} \parallel \vec{b}$ деп жазады. Екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын *бір-біріне тең* дейді ($\vec{a} = \vec{b}$), егер олардың ұзындықтары тең болса ($|\vec{a}| = |\vec{b}|$) және бағыттары бірдей болса. Осы анықтамадан келешекте өзіне өзін параллель жылжыта алатын векторлар қарастырылады. Вектордың бас нүктесін кеңістіктің кез келген нүктесіне параллель жылжытып алып келуге болады.

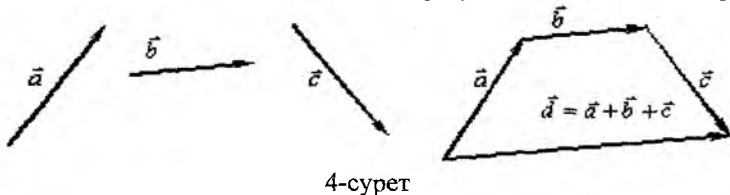
Кеңістіктегі үш векторларды *компланарлы* дейді, егер олар бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатса.

2. Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар. Векторларды қосу, азайту және векторларды санға көбейтуді векторларға қолданылатын сызықтық амалдар дейді. Кеңістікте $\vec{a}$ және $\vec{b}$ кез келген екі вектор берілсін. Кез келген O нүктесін алып $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ векторын тұрғызамыз. A нүктесінен $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ векторын тұрғызамыз.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың *қосындысы* деп $\vec{a}$ вектордың басы мен $\vec{b}$ вектордың соңғы нүктесін қосатын $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ векторын айтады (3-сурет).



Келесі суретте үш $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлардың қосындысы келтірілген.



Екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың *айырымы* деп $\vec{a}$ және $(-\vec{b})$ векторлардың қосындысы болатын $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ векторын айтады (5-сурет).



5-сурет

Атап өтетін жағдай, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларынан тұрғызылған параллелограммның бір диагонали, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың қосындысы, ал екіншісі айырымы болады (6-сурет).



6-сурет

$\vec{a}$ вектордың нақты α санға көбейтіндісі деп ұзындығы $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$ тең, $\vec{a}$ векторына коллинеарлы, егер $\alpha > 0$ болса, онда $\vec{a}$ векторына бағыттас, егер $\alpha < 0$ онда $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы бағыттас $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ векторын айтады.

Векторларға қолданылатын сызықтық амалдардың қасиеттері:

- 1) Векторларды қосу коммутативті
 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b}$
- 2) Векторларды қосу ассоциативті
 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a}$
- 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \forall \vec{a}$
- 5) Векторларды санға көбейту ассоциативті
 $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}, \quad \forall \vec{a}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- 6) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a}$
- 7) Векторды санға көбейту сандарды қосуға қарағанда дистрибутивті
 $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}, \quad \forall \vec{a}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- 8) Векторларды санға көбейту векторларды қосуға қарағанда дистрибутивті
 $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Осы сегіз қасиетті қанағаттандыратын векторлар жиын кеңістігі, сызықты немесе векторлық кеңістік деп аталады. Бұл кеңістікті R_3 деп белгілейді.

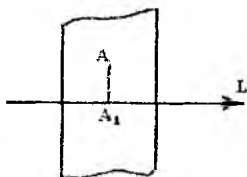
§12. Векторлардың проекциялары

Кеңістікте бағытталған L түзуі берілсін.

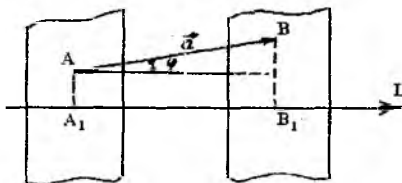
Анықтама. A нүктесінің L түзуіндегі проекциясы деп A_1 нүктесін айтады. Бұл A_1 нүкте A нүкте арқылы өтетін L түзуіне жүргізілген перпендикуляр жазықтықтың L түзуімен қиылысқан нүктесі (7-сурет).

Анықтама. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ вектордың бағытталған L түзуіндегі проекциясы деп $\overrightarrow{A_1B_1}$ векторын айтады, мұндағы A_1, B_1 нүктелері A және B нүктелердің L бойындағы сәйкес проекциялары (8-сурет).

Бұл проекцияны $pr_L \vec{a}$ деп белгілейді. Егер $\overrightarrow{AB}$ нөлдік немесе L түзуіне $\perp$ болса, онда оның проекциясы нөлдік вектор болады.

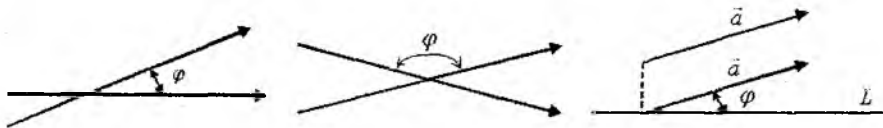


7-сурет



8-сурет.

Анықтама. Екі вектордың (өспен өстің, вектор мен өстің) арасындағы бұрыш деп, бір вектордың бағытын екінші вектордың бағытына сәйкес келетіндей етіп бұрағын ең кіші φ бұрышын айтады (9-суреттер).



9-сурет

Осы суреттерден $0 \leq \varphi \leq \pi$ болатыны айқын.

Анықтама. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ вектордың L түзуіндегі сандық проекциясы деп, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ вектордың ұзындығының $\vec{a}$ векторы мен L түзудің арасындағы φ бұрышының косинусына көбейтіндісін айтады, яғни

$$pr_L \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, L) = |\vec{a}| \cos \varphi \quad (12.1)$$

Егер $\vec{a} \neq 0$ және $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ болса, онда $pr_L \vec{a}$ оң және ол $\overrightarrow{A_1B_1}$ вектордың ұзындығына тең, яғни $pr_L \vec{a} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi = |\overrightarrow{A_1B_1}|$. Егер $\vec{a} \neq 0$ және $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ болса, онда $pr_L \vec{a} = 0$. $pr_L \vec{a}$ теріс, яғни $pr_L \vec{a} = -|\overrightarrow{A_1B_1}|$. Егер $\vec{a} = 0$ немесе $\varphi = \frac{\pi}{2}$ болса, онда

Сонымен $\vec{a}$ вектордың L бағытындағы проекциясы мен оның сандық проекциясының арасындағы байланыс мына теңдік арқылы беріледі:

$$\overline{np_L \vec{a}} = \vec{e} np_L \vec{a},$$

мұндағы $\vec{e}$ векторы L түзудің бірлік векторы.

Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары L бойында жатса, онда оларды былай жазуға болады:

$$\vec{a} = \alpha \vec{e}, \quad \vec{b} = \beta \vec{e}$$

мұндағы $\vec{e}$ векторы L түзудің бірлік векторы, ол α мен β сандар.

Мына теңдіктің

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \alpha \vec{e} \pm \beta \vec{e} = (\alpha \pm \beta) \vec{e} \quad (12.2)$$

орындалатындығы айқын. Бұл теңдіктен векторларды қосу азайту α және β сандарды қосуға немесе азайтуға келтіріледі.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың L бойындағы сандық проекцияларының мынадай қасиеттері бар:

$$1\text{-қасиет.} \quad np_L(\vec{a} \pm \vec{b}) = np_L \vec{a} \pm np_L \vec{b} \quad (12.3)$$

$$2\text{-қасиет.} \quad np_L(\alpha \vec{a}) = \alpha np_L \vec{a} \quad (12.4)$$

(12.3) дәлелдеуі 10-суреттен шығады.

$$\overline{np_L \vec{a}} + \overline{np_L \vec{b}} = \overline{A_1 B_1} + \overline{B_1 C_1} = \overline{A_1 C_1} = \overline{np_L \vec{c}} = \overline{np_L(\vec{a} + \vec{b})}.$$

Олай болса (12.2) формула бойынша: $\vec{e} np_L \vec{a} + \vec{e} np_L \vec{b} = \vec{e} np_L(\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow$

$$\vec{e}(np_L \vec{a} + np_L \vec{b}) = \vec{e} np_L(\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow np_L(\vec{a} + \vec{b}) = np_L \vec{a} + np_L \vec{b} \quad (12.5)$$

Тура осылай мына теңдікті $np_L(\vec{a} - \vec{b}) = np_L \vec{a} - np_L \vec{b}$ дәлелдеуге болады. Өйткені $\vec{a} = (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}$, онда (12.5), бойынша $np_L \vec{a} = np_L(\vec{a} - \vec{b}) + np_L \vec{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow np_L(\vec{a} - \vec{b}) = np_L \vec{a} - np_L \vec{b}.$$

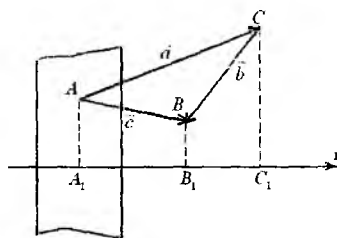
Енді (12.4) қасиеттің дұрыстығын дәлелдейік. φ бұрышы $\vec{a}$ мен L түзудің арасындағы бұрыш болсын.

а) Егер $\alpha > 0$ болса,

$$np_L(\alpha \vec{a}) = |\alpha \vec{a}| \cos \varphi = \alpha |\vec{a}| \cos \varphi = \alpha np_L \vec{a}.$$

б) егер $\alpha < 0$ болса,

$$\begin{aligned} np_L(\alpha \vec{a}) &= |\alpha \vec{a}| \cos(\pi - \varphi) = -\alpha |\vec{a}| \cos(\pi - \varphi) = \\ &= \alpha |\vec{a}| \cos \varphi = \alpha np_L \vec{a}. \end{aligned}$$



10-сурет

§13. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Анықтама. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ екі векторлардың скалярлық көбейтіндісі деп, екі вектордың ұзындықтарының көбейтіндісін олардың арасындағы φ бұрышының косинусына көбейткенге тең $(\vec{a}, \vec{b})$ санын айтады, яғни

$$\vec{a}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \varphi. \quad (13.1)$$

Бұл скалярлық көбейтіндіге басқаша да анықтама беруге болады.

Анықтама. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ екі векторлардың скалярлық көбейтіндісі деп, $\vec{a}$ вектордың ұзындығын $\vec{b}$ вектордың $\vec{a}$ бағытындағы сандық проекциясына көбейтіндісін немесе $\vec{b}$ вектордың ұзындығын $\vec{a}$ вектордың $\vec{b}$ бағытындағы сандық проекциясына көбейтіндісін айтады, яғни

$$\vec{a}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|np_a \vec{b} = |\vec{b}|np_b \vec{a}. \quad (13.2)$$

Скалярлық көбейтіндінің қасиеттері:

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ орын ауыстыру (коммутативті) қасиеті
- 2) $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$ үлестірімділік (дистрибутивті) қасиеті
- 3) $(\vec{a}, \alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a}, \vec{b})$

Бірінші қасиет скалярлық көбейтіндінің анықтамасынан тікелей шығады. Екінші қасиеттің дәлелдеуін келтірейік

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|np_a (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|(np_a \vec{b} + np_a \vec{c}) = |\vec{a}|np_a \vec{b} + |\vec{a}|np_a \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$$

Бұл жерде векторлардың сандық проекцияларының қасиеттерін және векторлардың скалярлық көбейтіндісінің анықтамасын пайдаландық.

Үшінші қасиеттің дәлелдеуі:

$$(\vec{a}, \alpha \vec{b}) = |\vec{a}|np_a (\alpha \vec{b}) = |\vec{a}|\alpha np_a \vec{b} = \alpha |\vec{a}|np_a \vec{b} = \alpha (\vec{a}, \vec{b}).$$

Осы қасиеттерден мыналар шығады:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3.$$

$$(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = \alpha_3 (\vec{a}, \vec{b}).$$

§14. Векторлардың сызықты тәуелділігі

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ векторлары берілсін. Кез келген мына түрдегі өрнек

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n \quad (14.1)$$

мұндағы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ кейбір нақты сандар, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ векторлардың *сызықты комбинациясы* деп аталады.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ векторларды *сызықты тәуелді* дейді, егер барлығы бірдей нөлге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ тұрақты сандар табылып, мына теңдік орындалса

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = 0 \quad (14.2)$$

Егер (14.2) теңдік тек $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ үшін ғана орындалса, онда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ векторларды *сызықты тәуелсіз* деп атайды.

Егер $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ векторлары сызықты тәуелді болса, онда оның біреуі қалғанының сызықты комбинациясы болады. Шынында да $\alpha_n \neq 0$ болсын, онда

(14.2) екі жағын α_n -ге бөліп, мына өрнекті аламыз

$$\vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_{n-1} \vec{e}_{n-1}. \quad (14.3)$$

Мұндағы $\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}$, $\beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_n}$, ..., $\beta_{n-1} = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$. Бұл теңдік $\vec{e}_n$ вектордың $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$ векторларының сызықты комбинациясы екендігін көрсетеді.

Егер $\vec{a}$ векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ векторларының сызықты комбинациясы болса, яғни

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n, \quad (14.4)$$

теңдігі орындалса, онда $\vec{a}$ векторы берілген векторлар арқылы жіктелген деп аталады.

Сызықты тәуелді векторларға кез келген екі коллинеарлы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары мысал бола алады, себебі бұл жағдайда $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, мұндағы α қайсібір нақты сан.

Егер $\vec{e}_1$ және $\vec{e}_2$ векторлары коллинеарлы болмаса, онда кез келген оларға компланарлы $\vec{a}$ векторы $\vec{e}_1$ және $\vec{e}_2$ векторлары арқылы бір мәнді жіктелетіндігі белгілі, яғни

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2. \quad (14.5)$$

Осы (14.5) теңдіктен, кез келген үш компланарлы векторлардың әрқашанда сызықты тәуелділігі шығады.

Тура осылай, егер $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ үш компланарлы емес векторлар болса, онда үш өлшемді кеңістіктегі кез келген $\vec{a}$ векторы осы үш вектор бойынша бір мәнді жіктеледі, яғни

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3. \quad (14.6)$$

Осы (14.6) теңдіктен үш өлшемді кеңістіктегі кез келген төрт вектордың әрқашанда сызықты тәуелділігі шығады.

Анықтама. Үш өлшемді кеңістіктің базисі деп осы кеңістіктің компланарлы емес белгілі бір ретпен алынған үш векторын айтады.

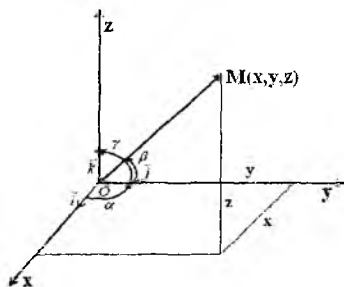
Жазықтықтың базисі деп коллинеарлы емес осы жазықтықтың белгілі бір ретпен алынған екі векторын айтады.

Түзудің кез келген нөл емес векторы осы түзудің базисі болады.

§15. Координаттары берілген векторларға қолданылатын сызықтық амалдар

Үш өлшемді кеңістікте тік бұрышты $OXYZ$ координаталар жүйесін енгіземіз. O нүктесі арқылы өтетін өзара үш перпендикуляр бағытталған түзулер координат өстері деп аталады. Мұндағы O нүктесі координаттардың *бас нүктесі* деп аталады. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ арқылы OX, OY және OZ координаттардың бірлік векторлары белгіленген. Осы кеңістікте кез келген M нүктесі берілсін

(11-сурет). Бағытталған OM кесінді M нүктесінің *радиус векторы* деп аталынады. $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ радиус вектордың координат естеріндегі сандық проекциялары x, y, z деп белгіленген. Бұл x, y, z -тер M нүктесінің координаттары, x - абсцисса, y - ордината, z - аппликата деп аталады. Сонымен, x $\vec{a}$ вектордың Ox өстегі проекциясы, y Oy өстегі проекциясы, z Oz өстегі проекциясы болса, онда $\vec{a} = (x, y, z)$ деп жазылады.



11-сурет

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлары берілсін. Онда мына үш теңдік дұрыс:

$$1. \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2, \quad (15.1)$$

$$2. \vec{a} \pm \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) \pm (x_2, y_2, z_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \quad (15.2)$$

$$3. \alpha \vec{a} = \alpha (x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1). \quad (15.3)$$

(15.1) теңдіктің дұрыстығы, векторлардың анықтамасынан шығады. Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар, олардың проекцияларына да қолданылады, сондықтан (15.2) және (15.2) теңдіктері дұрыс.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координат өстерінің бірлік векторлары болғандықтан мына теңдіктер дұрыс:

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1), \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0. \quad (15.4)$$

Кез келген $\vec{a} = (x, y, z)$ векторын былай жазуға болады

$$\vec{a} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (15.5)$$

(15.2) және (15.3), (15.4) формулалардан $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = \vec{a}$.

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлары берілсін. Онда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (15.6)$$

шынында да, (15.4) пайдаланып

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k})(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 \vec{i} \cdot \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + z_1 z_2 \vec{k} \cdot \vec{k} + \\ + x_1 y_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + x_1 z_2 \vec{i} \cdot \vec{k} + y_1 x_2 \vec{j} \cdot \vec{i} + y_1 z_2 \vec{j} \cdot \vec{k} + z_1 x_2 \vec{k} \cdot \vec{i} + z_1 y_2 \vec{k} \cdot \vec{j} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \text{ Егер } \\ \vec{a} = \vec{b} \text{ болса, яғни } x_1 = x_2 = x, y_1 = y_2 = y, z_1 = z_2 = z, \text{ онда}$$

$$|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (15.7)$$

Вектордың ұзындығы (модулі) оның сандық проекцияларының квадраттарының қосындысының квадрат түбіріне тең. (15.7) формуламен $A(x_1, y_1, z_1)$ және $B(x_2, y_2, z_2)$ екі нүктенің ара қашықтығын табуға болады. Себебі бұл ара қашықтық $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлардың ұштарының ара қашықтығына тең. Сонымен 12-суреттен

$$|\vec{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (15.8)$$

(15.5) формуладан мынандай тұжырым шығады:

$$\begin{aligned} \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z &= (np_x \vec{a})\vec{i} + (np_y \vec{a})\vec{j} + (np_z \vec{a})\vec{k} = \\ &= (|\vec{a}| \cos \alpha)\vec{i} + (|\vec{a}| \cos \beta)\vec{j} + (|\vec{a}| \cos \gamma)\vec{k}. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Мұндағы α, β және γ бұрыштары $\vec{a}$ векторымен координат өстерінің арасындағы сәйкес бұрыштары. (15.9) формуладан $x = |\vec{a}| \cos \alpha$, $y = |\vec{a}| \cos \beta$, $z = |\vec{a}| \cos \gamma \Rightarrow$

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (15.10)$$

Бұл $\cos \alpha, \cos \beta$ және $\cos \gamma$ -лар $\vec{a}$ векторының бағыттауыш косинустары деп аталады және $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Егер $\vec{a}^0$ векторы $\vec{a}$ вектордың бірлік векторы болса, онда $\vec{a}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Егер $\vec{a}^0$ векторы $\vec{a}$ вектордың бірлік векторы болса, онда $\vec{a}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Мысал. $\vec{a} = (2, 0, 1)$ және $\vec{b} = (-1, 4, -1)$ векторлары берілсін. $2\vec{a} - 3(\vec{b} + \vec{i}) + 2(\vec{a} - \vec{k})$ векторының координаттарын табу керек.

Шешімі.

$$\begin{aligned} 2\vec{a} - 3(\vec{b} + \vec{i}) + 2(\vec{a} - \vec{k}) &= 2(2, 0, 1) - 3((-1, 4, -1) + (1, 0, 0)) + 2((2, 0, 1) - (0, 0, 1)) = (4, 0, 2) - \\ &- 3(0, 4, -1) + 2(2, 0, 0) = (4, 0, 2) - (0, 12, -3) + (4, 0, 0) = (4 - 0 + 4, 0 - 12 + 0, 2 + 3 + 0) = (8, -12, 5). \end{aligned}$$

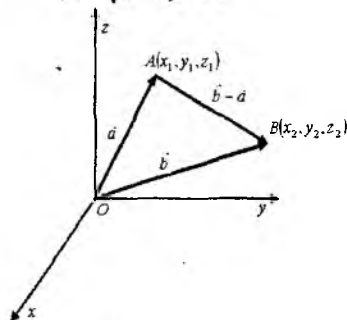
§16. Векторлардың коллинеарлық және ортогоналдық болу шарттары

Егер $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлары коллинеарлы болса, онда оларды былай жазуға болады $\vec{a} = \alpha \vec{b}$, мұндағы $\alpha \in R$.

Олай болса $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \alpha \vec{b} \Leftrightarrow (x_1, y_1, z_1) = \alpha(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2)$, онда $x_1 = \alpha x_2$, $y_1 = \alpha y_2$, $z_1 = \alpha z_2$, яғни

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (16.1)$$

(16.1) формуланы векторлардың коллинеарлы болу шарттары деп атайды.



12-сурет

Егер (16.1) формуланың бөлімдерінің біреуі немесе екеуі нөл болса, онда оны нөлге бөлу деп түсінуге болмайды, олай жазылу векторлардың коллинеарлы болуының символикалық жазылуы деп түсіну керек.

Мысал: $\vec{a} = (1, 2, 3)$ және $\vec{b} = (4, 8, 12)$ векторлары коллинеарлы, себебі олардың координаттары (16.1) шарттарды қанағаттандырады. $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ олай болса $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Егер $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ перпендикуляр векторлар болса, онда олардың скалярлық көбейтіндісі нөлге тең, яғни $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Осыдан

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (16.2)$$

(16.2) формуланы векторлардың перпендикуляр болу шарты деп атайды.

Екі векторлардың скалярлық көбейтіндісінен, екі векторлардың арасындағы бұрышты анықтауға болады. Скалярлық көбейтіндінің бірінші анықтамасынан

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (16.3)$$

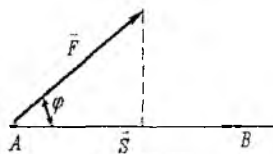
Скалярлық көбейтіндінің екінші анықтамасынан $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| n_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| n_{\vec{b}} \vec{a}$

$$n_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \quad (16.4)$$

$$n_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (16.5)$$

Мысал: $\vec{F} = (3, 2, 4)$ күштің түзудің бойымен денені $A(2, 4, 6)$ нүктеден $B(4, 2, 7)$ нүктеге жылжитқандағы жұмысты есептеу керек және $\vec{F}$ күші $\overline{AB}$ -ға қандай бұрышпен бағытталғандығын табу керек.

Шешімі: Материалдық нүкте түзудің бойымен $\vec{F}$ күштің әсерінен A нүктеден B нүктеге жылжысын. $\vec{F}$ күші мен $\overline{AB} = \vec{S}$ -ның арасындағы бұрыш φ болсын. Онда $\vec{F}$ күшінің $\vec{S}$ бойындағы жасаған жұмысы мынаған тең:



13-сурет

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \varphi \quad \text{яғни} \quad A = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

Сонымен, тұрақты күштің жұмысы күш векторы мен жол векторының скалярлық көбейтіндісіне тең.

$\vec{S} = \overline{AB} = (2, -2, 1)$, олай болса $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 6$ (жұмыс бірлігі).

$\vec{F}$ және $\vec{S}$ арасындағы φ бұрышты мына формуламен табамыз

$$\cos \varphi = \frac{\vec{F} \cdot \vec{S}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{S}|}, \quad \cos \varphi = \frac{6}{\sqrt{9+4+16} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{29} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{29}}, \quad \varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

§17. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

AB кесіндіні берілген $\lambda > 0$ қатынаста бөлетін C нүктенің координаталарын табу керек, яғни

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = \lambda \quad (17.1)$$

Егер $A=(x_1, y_1, z_1)$ және $B=(x_2, y_2, z_2)$ болса, C нүктенің белгісіз x, y және z координаттарын табу керек. 14-суреттен және (17.1) формуладан

$$\overline{AC} = \lambda \overline{CB} \quad (17.2)$$

дұрыстығы шығады.

$\overline{AC}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overline{CB}=(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$ болғандықтан, (17.2) формуладан $(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=\lambda(x_2-x, y_2-y, z_2-z) \Rightarrow (x-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)=$
 $= (\lambda(x_2-x), \lambda(y_2-y), \lambda(z_2-z)).$

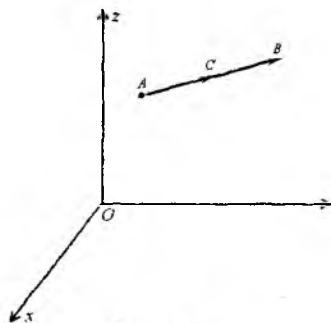
$$\overline{AC}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1), \quad \overline{CB}=(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$$

болғандықтан, (17.2) формуладан

$$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=\lambda(x_2-x, y_2-y, z_2-z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)=(\lambda(x_2-x), \lambda(y_2-y), \lambda(z_2-z)).$$

Соңғы теңдіктің координаттарын теңестіріп теңдеулер жүйесін аламыз:



14-сурет

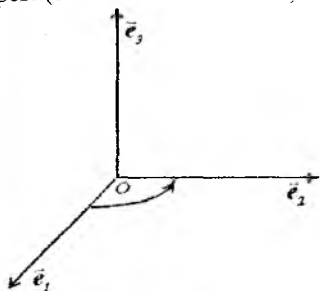
$$\left. \begin{aligned} x-x_1 &= \lambda(x_2-x) \\ y-y_1 &= \lambda(y_2-y) \\ z-z_1 &= \lambda(z_2-z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \\ z &= \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

(17.3) формулалар кесіндіні берілген қатнаста бөлу формулалары деп аталады. Дербес жағдайда $\lambda=1$ болғанда, C нүктесі кесіндінің ортасында жатса, (17.3) түрі мынандай болады:

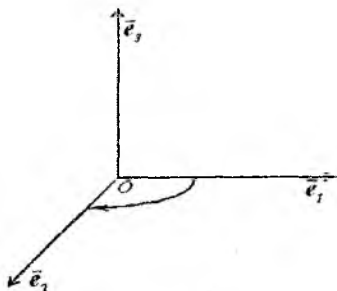
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (17.4)$$

§18. Векторлардың векторлық көбейтіндісі және оның қасиеттері

Анықтама. Бас нүктелері бір нүктеге орналасқан ортонормалданған $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ және $\vec{e}_3$ векторлар үштігін *оң (сол)* дейміз, егерде $\vec{e}_3$ вектордың соңғы нүктесінен қарағанда $\vec{e}_1$ -ден $\vec{e}_2$ векторына бұратын ең кіші бұрылыс сағат тіліне қарсы (сағат тіліне бағытталса) бағытта көрінсе.



оң үштік
15-сурет



сол үштік
16-сурет

Кез келген компланарлы емес $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлар үштігінен алты үштік құруға болады

$$\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3, \vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_1, \vec{e}_3\vec{e}_1\vec{e}_2, \vec{e}_2\vec{e}_1\vec{e}_3, \vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_2, \vec{e}_3\vec{e}_2\vec{e}_1 \quad (18.1)$$

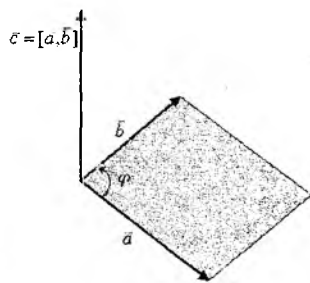
(18.1)-дің бірінші үштігі оң болса, онда қатар тұрған үш үштік оң болады, ал қалған үш үштік сол болады.

Координаттар жүйесін оң (сол) деп атайды, егер олардың базистері $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ оң (сол) үштік құрса.

Анықтама. Екі $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының **векторлық көбейтіндісі** деп келесі үш шартты қанағаттандыратын $\vec{c}$ векторын айтады.

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$,
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$,
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ үштігі оң үштік құрайды.

Векторлық көбейтіндіні $[\vec{a}, \vec{b}]$ немесе $\vec{a} \times \vec{b}$ деп белгілейді.



17-сурет

Векторлық көбейтіндінің кейбір қасиеттері:

I-қасиет. $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ вектордың ұзындығы, бас нүктелері бір нүктеге орналасқан $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларынан құрылған параллелограммның ауданына тең. Бұл бірінші шарттан және 17-суреттен шығады.

2-қасиет. Векторлық көбейтінді нөлге тең сонда, тек сонда ғана, егерде $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеарлы болса немесе екеуінің біреуі нөлдік вектор болса.

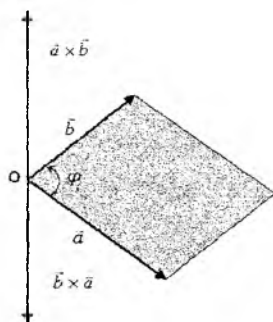
3-қасиет. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ көбейткіштердің орнын ауыстырғанда көбейтінді таңбасын өзгертеді. $\vec{a} \times \vec{b}$ және $\vec{b} \times \vec{a}$ векторлары коллинеарлы ұзындықтары бірдей, олай болса параллелограммның ауданы өзгермейді. Бірақ үшінші шартты қанағаттандыру үшін $\vec{c}$ вектордың бағытын қарама-қарсы бағытқа өзгерту керек (18-сурет). Сондықтан $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

4-қасиет.
$$\begin{cases} [\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}] \\ [\vec{a}, \beta \vec{b}] = \beta [\vec{a}, \vec{b}] \\ [\alpha \vec{a}, \beta \vec{b}] = \alpha \beta [\vec{a}, \vec{b}] \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Бұл қасиеттер векторлық көбейтіндінің анықтамасынан шығады.

5-қасиет. $[\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c}] = \alpha [\vec{a}, \vec{c}] + \beta [\vec{b}, \vec{c}]$

Векторлық көбейтіндінің үлестірімділік заңын кейін дәлелдейміз.



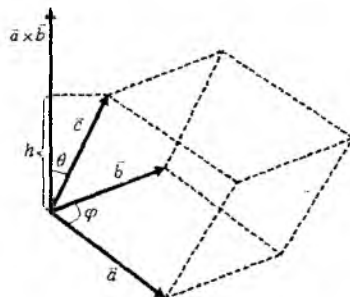
18-сурет

§19. Векторлардың аралас көбейтіндісі және оның қасиеттері

R_3 кеңістігіндегі әрбір компланарлы емес бастары бір нүктеге орналасқан кез келген үш вектор параллелепипедті анықтайды. (19-сурет). Осы үш векторлар параллелепипедтің қырларын құрайды. Параллелепипедті оң (теріс) бағытталған дейді, егерде $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары оң (сол) үштік құрайтын болса.

Анықтам. Кез келген $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары берілсін. Егер $\vec{a}$ векторын $\vec{b}$ векторына векторлық көбейтіп, содан кейін $\vec{a} \times \vec{b}$ векторын $\vec{c}$ векторына скаляр көбейтсек нәтижесінде $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп аталатын $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ саны шығады.

Үш вектордың аралас көбейтіндісін $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$, $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ немесе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ символдарымен белгілейміз.



19-сурет

Аралас көбейтіндінің кейбір қасиеттері:

1-қасиет. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ аралас көбейтінді $\vec{a}, \vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларынан құрылған бағытталған параллелепипедтің көлеміне тең. Егер $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ үштігі оң болса, оң таңбамен, ал $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ үштігі сол болса, теріс таңбамен алынған осы параллелепипедтің көлеміне тең.

Шынында да, параллелепипедтің табаны $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларынан құрылған параллелограмм болады. Оның ауданы $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Параллелепипедтің биіктігі $h = |\vec{c}| \cos \theta$, θ дегеніміз $(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b})$. Олай болса параллелепипедтің көлемі

$$V = S \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \theta = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}). \quad (19.1)$$

Егер $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ оң үштік құрса, онда $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $V > 0$, ал егер сол үштік болса, онда $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $V < 0$.

2-қасиет. Егер $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары компланарлы болса, онда аралас көбейтінді нөлге тең.

Шынында да, егер $\theta = \frac{\pi}{2}$ немесе $\varphi = 0$ болса, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ аралас көбейтінді нөлге тең. $\theta = \frac{\pi}{2}$ болса $\vec{c}$ векторы $\vec{a}, \vec{b}$ векторлары жатқан жазықтықта жатады, ал $\varphi = 0$ болса, онда $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеарлы болады. Сондықтан $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары осы екі жағдайда да компланарлы болады. Сонымен

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 0 \quad (19.2)$$

теңдігі үш вектордың компланарлы болу шарты.

3-қасиет. Егер аралас көбейтіндінің көбейткіштерін циклдік орын алмастырсак оның мәні өзгермейді

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \quad (19.3)$$

Шынында да $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \pm V$, ал оң жақтағы таңба бірдей, себебі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$; $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ - үштіктер бірдей бағытталған.

$$\text{Салдар. } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) \quad (19.4)$$

4-қасиет. Аралас көбейтіндінің сызықтық қасиеті.

$$(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \alpha (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + \beta (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \quad (19.5)$$

Бұл теңдіктің дәлелдеуі (19.3) формуладан және скалярлық көбейтіндінің сызықтық қасиетінен шығады.

Енді векторлық көбейтіндінің 5-ші қасиетін дәлелдейік:

$$[\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c}] = \alpha [\vec{a}, \vec{c}] + \beta [\vec{b}, \vec{c}] \quad (19.6)$$

Аралас көбейтіндінің 3-ші және 4-ші қасиеттерінен

$$\begin{aligned} (\vec{d}, [\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c}]) &= (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, [\vec{c}, \vec{d}]) = \alpha (\vec{a}, [\vec{c}, \vec{d}]) + \beta (\vec{b}, [\vec{c}, \vec{d}]) = \alpha (\vec{d}, [\vec{a}, \vec{c}]) + \beta (\vec{d}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \\ &= (\vec{d}, \alpha [\vec{a}, \vec{c}] + \beta [\vec{b}, \vec{c}]) \end{aligned}$$

Осыдан (19.6) формуланың дұрыстығы шығады, яғни

$$[\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c}] = \alpha [\vec{a}, \vec{c}] + \beta [\vec{b}, \vec{c}]$$

§20. Координаттары берілген векторлардың векторлық және аралас көбейтінділері

Тік бұрышты декарт координат жүйесінің $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ базистік бірлік векторлары оң үштік құрсын. Онда векторлардың векторлық көбейтіндісінің анықтамасы бойынша

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \quad (20.1)$$

Бізге $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ және $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$ векторлары берілсін. Онда (20.1) формуланы пайдаланып және векторлық көбейтіндінің қасиеттерінен мына өрнекті аламыз

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 \vec{i} \times \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \times \vec{j} + \\ &+ z_1 z_2 \vec{k} \times \vec{k} + x_1 y_2 \vec{i} \times \vec{j} + x_1 z_2 \vec{i} \times \vec{k} + y_1 x_2 \vec{j} \times \vec{i} + y_1 z_2 \vec{j} \times \vec{k} + z_1 x_2 \vec{k} \times \vec{i} + \\ &+ z_1 y_2 \vec{k} \times \vec{j} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \end{aligned} \quad (20.2)$$

Бұл формуланы үшінші ретті анықтауыш түрінде де жазуға болады

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (20.3)$$

Егер $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3) = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}$ болса, онда аралас көбейтіндінің анықтамасы бойынша (20.2) формуланы пайдаланып мына өрнекті аламыз

$$((\vec{a} \times \vec{b}), \vec{c}) = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (20.4)$$

Сонымен $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардан құрылған параллелограммның ауданы, векторлық көбейтіндінің анықтамасы бойынша, былай анықталады

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (20.5)$$

$\vec{a}, \vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларынан құрылған бағытталған параллелепипедтің көлемі, аралас көбейтіндінің анықтамасы бойынша былай анықталады

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (20.6)$$

(20.6) формуладағы анықтауыштың бірінші жолы $\vec{a}$ векторының, екінші жолы $\vec{b}$ векторының ал үшінші жолы $\vec{c}$ векторының координаттары.

Мысал 1. $A_1(3,2,-1)$, $A_2(-1,0,2)$, $A_3(1,2,5)$ төбелері берілген үшбұрыштың ауданын табу керек.

Шешімі: Алдымен $\overline{A_1A_2}$ мен $\overline{A_1A_3}$ векторларынан тұрғызылған параллелограммның ауданын табамыз. Параллелограммның ауданы векторлық көбейтіндінің анықтамасы бойынша $\overline{A_1A_2}$ және $\overline{A_1A_3}$ векторлардың векторлық көбейтіндісінің модуліне тең, яғни

$$S = |\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}|. \quad (20.7)$$

мұндағы, $\overline{A_1A_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\overline{A_1A_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$.

Ал $A_1A_2A_3$ үшбұрыштың ауданы мына формула бойынша анықталады

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}S. \quad (20.8)$$

Сонымен $\overline{A_1A_2} = \{-4, -2, 3\}$, $\overline{A_1A_3} = \{-2, 0, 6\}$

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \{ -12\vec{i} - (-24 + 6)\vec{j} + (-4)\vec{k} \} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{mod} \{ -12\vec{i} + 18\vec{j} - 4\vec{k} \} = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + 18^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 324 + 16} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{484} = \frac{1}{2} \cdot 22 = 11. \quad S_{\Delta} = 11 \quad (\text{кв.бірлік}). \end{aligned}$$

Мысал 2. Төбелері $A_1(1,2,3)$, $A_2(0,-1,1)$, $A_3(2,5,2)$ және $A_4(3,0,-2)$ болатын пирамиданың көлемін табу керек.

Шешімі. Алдымен $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ және $\overline{A_1A_4}$ векторларын тұрғызылған параллелепипедтің көлемін аралас көбейтінің анықтамасы бойынша мына формуламен табамыз:

$$V_{\text{пар}} = \operatorname{mod} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Ал үшбұрышты пирамиданың көлемі

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар}}.$$

Алдымен $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ және $\overline{A_1A_4}$ векторлардың координаттарын табамыз. Сонымен

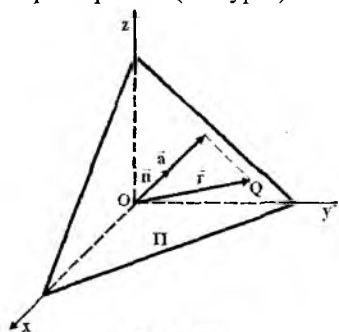
$$\overline{A_1A_2} = \{-1, -3, -2\}, \quad \overline{A_1A_3} = \{1, 3, -1\}, \quad \overline{A_1A_4} = \{2, -2, -5\}$$

$$V_{\text{мпр}} = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \bmod \{15 + 4 + 6 + 12 - 15 + 2\} = \frac{1}{6} \bmod \{24\} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4.$$

$$V_{\text{мпр}} = 4 \text{ (куб бір).}$$

§21. Үш өлшемді кеңістіктегі жазықтықтың теңдеулері

R_3 кеңістігінде бас нүктесі O -да жататын $\vec{a}$ векторы берілсін. (20-сурет). $\vec{a}$ векторының соңғы нүктесінен осы векторға перпендикуляр Π жазықтығын тұрғызайық. $Q(x, y, z)$ деп Π жазықтығында жатқан кез келген нүктені, ал $\vec{r} = (x, y, z)$ деп Q нүктесінің радиус векторын белгілейік. $\vec{a}$ векторының ұзындығы $p = |\vec{a}|$, ал оның бірлік векторы $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ болсын. Мұндағы α, β және γ бұрыштары $\vec{n}$ векторының x, y, z өстерімен жасайтын бұрыштары. Кез келген Q нүктесінің радиус векторларының $\vec{n}$ векторындағы проекциялары тұрақты және ол p -ға тең, яғни



20-сурет

$$(\vec{r}, \vec{n}) = p \quad (p \geq 0) \quad (21.1)$$

(21.1) теңдеу Π жазықтықтың *вектор түріндегі* теңдеуі деп аталады. Егер $p=0$, онда Π жазықтығы бас нүкте арқылы өтеді. (21.1) теңдеуді координаттар арқылы былай жазуға болады

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p \quad (p \geq 0) \quad (21.2)$$

(21.2) теңдеу Π жазықтықтың *нормаль түріндегі* теңдеуі деп аталады. Егер (21.2) формуланың екі жағын нөл емес санға көбейтсек нәтижесінде осы теңдеуге эквивалентті Π жазықтығының теңдеуін аламыз

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \quad (21.3)$$

(21.3) формула Π жазықтықтың *жалпы түрдегі* теңдеуі деп аталады. (21.3) теңдеуді әрқашанда нормальді түрге келтіруге болады, ол үшін оны

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (21.4)$$

деген нормалаушы санға көбейту керек. M -ның таңбасы D санының

таңбасына карама-қарсы, себебі $P = -MD \geq 0$ болуы керек.

$$M \cdot Ax + M \cdot By + M \cdot Cz = -MD \quad (P = -MD)$$

Мұндағы $(MA)^2 + (MB)^2 + (MC)^2 = 1$, шынында да

$$\left(\pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)^2 + \left(\pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)^2 + \left(\pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)^2 = \frac{A^2}{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{B^2}{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{C^2}{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{A^2 + B^2 + C^2} = 1.$$

Сонымен (MA, MB, MC) координаттар бірлік вектордың координаттары, яғни

$$\vec{n} = (MA, MB, MC), \quad \cos \alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$P = -MD$ деп белгілеп (21.2) теңдеуді аламыз. $\vec{N} = (A, B, C)$ векторы Π жазықтығына перпендикуляр, себебі ол $\vec{n}$ векторына коллинеарлы, ал $\vec{n}$ векторы Π жазықтығына перпендикуляр. $\vec{n} = (MA, MB, MC) = M(A, B, C) = \overline{MN}$, яғни $\vec{n}$ және $\vec{N}$ векторлары коллинеарлы. (21.3) теңдеуді мына түрге келтіруге болады

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (21.5)$$

Мұндағы $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$. (21.5) формула Π жазықтықтың кесіндідегі теңдеуі деп аталады. Бұл жазықтық OX өсін a нүктеде, OY өсін b нүктеде, OZ өсін c нүктеде қиып өтеді.

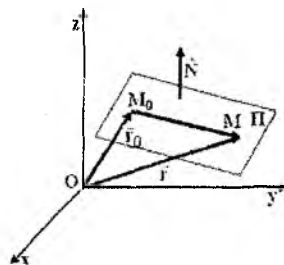
Жазықтықтың жалпы түрдегі теңдеуінің дербес түрлері:

1. Егер $D=0$ болса, онда (21.3) теңдеуінің түрі мынадай болады $Ax + By + Cz = 0$. Бұл теңдеуді $O(0,0,0)$ нүктесі қанағаттандырады. Олай болса бұл жазықтық бас нүкте арқылы өтеді.
2. Егер $C=0$ болса, онда $Ax + By + D=0$ теңдеуін аламыз. Оның $\vec{N} = (A, B, 0)$ нормаль векторы OZ өсіне перпендикуляр болады. Сондықтан бұл жазықтық OZ өсіне параллель болады, егер $B=0$ болса OY өсіне ал $A=0$ болса OX өсіне параллель болады.
3. Егер $C=D=0$ болса, онда $Ax + By = 0$ жазықтығы $O(0,0,0)$ нүктесі арқылы және OZ өсі арқылы өтеді, яғни OZ өсіне параллель болады. Тура солай $By + Cz=0$ және $Ax + Cz=0$ жазықтықтары сәйкес OX және OY өстері арқылы өтеді.
4. Егер $A=B=0$ болса, онда (21.3) теңдеудің түрі мынандай болады $Cz + D=0$, яғни $z = -\frac{D}{C}$. Бұл жазықтық OXY жазықтығына параллель. Тура солай $Ax + D=0$ және $By + D=0$ жазықтықтары сәйкес OYZ және OXZ жазықтықтарына параллель болады.

5. Егер $A=B=D=0$ болса, (21.3) түрі мынандай болады $Cz=0$, яғни $z=0$. Бұл OXY жазықтықтың теңдеуі. Тура солай $y=0$ - OXZ жазықтықтың теңдеуі, $x=0$ - OYZ жазықтықтың теңдеуі.

§22. Берілген нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеуі

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін $\vec{N}=(A, B, C)$ векторына перпендикуляр Π жазықтығының теңдеуін табыңдар (21-сурет). $M(x, y, z)$ нүктесі Π жазықтықтың кез келген нүктесі болсын. Π жазықтығында $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ векторы $\vec{N}$ векторына перпендикуляр болады. Олай болса $\overline{M_0M}$ және $\vec{N}$ векторлардың скалярлық көбейтіндісі нөлге тең, яғни



21-сурет

$$(\vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \quad (22.1)$$

немесе координат түрінде

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \quad (22.2)$$

(22.1) теңдік жазықтықтың бір нүкте арқылы өтетін векторлық түріндегі теңдеуі, ал (22.2) жалпы түрдегі теңдеуі, яғни

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

мұндағы $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

§23. Үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

Кеңістікте бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте арқылы тек қана бір жазықтықты салуға болады. Бір түзудің бойында жатпайтын $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ және $M_3(x_3, y_3, z_3)$ үш нүкте арқылы өтетін Π жазықтықтың теңдеуін табу керек. Π жазықтықта жатқан кез келген $M(x, y, z)$ нүктесін алайықта

$\overline{M_1M} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ векторларын құрайық. Бұл үш вектор Π жазықтығында жатады, сондықтан олар компланарлы. Үш вектор компланарлы болу үшін олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең болуы керек. Осыдан $(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0$, яғни

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (23.1)$$

Бұл (23.1) үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.

Мысал: Берілген $M_1(1,-1,2), M_2(1,3,2), M_3(3,1,3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жаз.

Шешімі: Іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін табу үшін (23.1) теңдікті пайдалансақ жеткілікті, яғни

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1-1 & 3+1 & 2-2 \\ 3-1 & 1+1 & 3-2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Соңғы анықтауышты бірінші жолы бойынша жіктеп, мына теңдікті аламыз $4(x-1)-(y+1)(0)+(z-2)(-8)=0$ немесе $4x-8z+12=0 \Rightarrow x-2z+3=0$.

§24. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

Π_1 және Π_2 екі жазықтық берілсін

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24.1)$$

Екі жазықтық арасындағы бұрыш деп екі жақты бұрыштардың біреуін айтады.

$\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ және $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ векторлары осы екі жазықтықтардың сәйкес нормаль векторлары. Сондықтан осы екі вектордың арасындағы φ бұрышы екі жақты бұрыштардың біреуіне тең. Олай болса, екі вектордың скалярлық көбейтіндісінен іздеп отырған бұрышты табамыз.

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = |\vec{N}_1| |\vec{N}_2| \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} \quad \text{немесе} \quad \cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (24.2)$$

Егер Π_1 және Π_2 жазықтықтары перпендикуляр болса, онда олардың нормальдары да перпендикуляр болады, яғни $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$ (және керісінше). Онда олардың скалярлық көбейтіндісі нөлге тең, яғни $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$. Осыдан

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (24.3)$$

(24.3) формуланы екі жазықтықтың перпендикуляр болу шарты деп атайды.

Егер Π_1 және Π_2 жазықтықтары параллель болса, онда олардың нормальдары $\vec{N}_1$ және $\vec{N}_2$ де параллель болады. Коллинеарлы векторлардың қасиеттері бойынша

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (24.4)$$

(24.4) формула екі жазықтықтардың параллель болу шарты деп аталады. Егер де

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad (24.4)$$

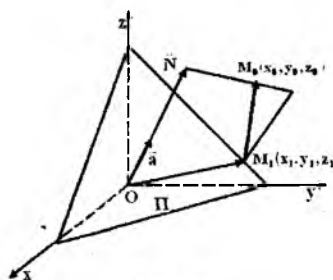
болса, онда екі жазықтық бір-бірімен беттеседі, онда (24.1) теңдеулер тек бір жазықтықтың теңдеуін анықтайды.

§25. Нүктеден жазықтыққа дейінгі ара қашықтық

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен Π жазықтыққа дейінгі ара қашықтықты табу керек. Π жазықтықтың теңдеуі

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (25.1)$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден Π жазықтыққа дейінгі d ара қашықтық $\overline{M_1 M_0}$ вектордың осы жазықтықтың $\vec{N} = (A, B, C)$ нормаліндегі проекциясына тең, 22-сурет, мұндағы $M_1(x_1, y_1, z_1)$ жазықтықтың кез келген нүктесі. Сонымен $d = np_N \overline{M_1 M_0}$ скалярлық көбейтіндінің екінші анықтамасынан $(\vec{N} \cdot \overline{M_1 M_0} = |\vec{N}| np_N \overline{M_1 M_0})$ табылады



22-сурет

$$\begin{aligned} d &= |np_N \overline{M_1 M_0}| = \frac{|\vec{N} \cdot \overline{M_1 M_0}|}{|\vec{N}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned} \quad (25.2)$$

Ал $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесі Π жазықтығының нүктесі болғандықтан оның координаттары (25.1) теңдікті қанағаттандырады, яғни

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \quad \text{осыдан} \quad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1 \quad (25.3)$$

(25.3) формуланы (25.2) -ге қойып мына формуланы аламыз

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (25.4)$$

Егер Π жазықтығы $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ теңдеуімен берілсе, онда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден Π жазықтығына дейінгі ара қашықтық мына формуламен табылады

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p| \quad (25.5)$$

Мысал: $M_0(1, 2, 4)$ нүктеден $2x + 2y - z - 11 = 0$ жазықтыққа дейінгі ара қашықтықты табу керек.

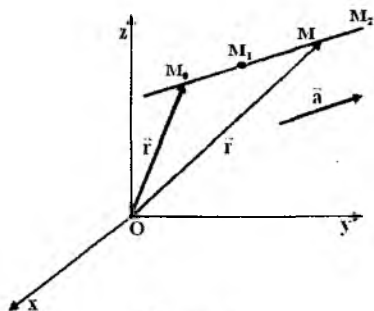
Шешімі: Ара қашықтықты (25.4) формуламен есептейміз.
 $A=2, B=2, C=-1, D=-11$.

$$x_0=1, y_0=2, z_0=4. \text{ Олай болса } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 11|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|-9|}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

§26. Үш өлшемді кеңістіктегі түзудің теңдеулері

L түзудің қайсібір M_0 нүктеден өтетіндігі белгілі болса және осы түзуге параллель болатын $\vec{a}$ векторы берілсе, онда оның кеңістіктегі орны толық анықталады. $\vec{a}$ векторы осы түзудің *бағыттауыш векторы* деп аталады. Сонымен $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі және

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ векторы берілсін. M_0 нүктесі арқылы өтетін $\vec{a}$ векторы бағыттауыш вектор болатын L түзудің теңдеуін құру керек. (23-сурет). $M(x, y, z)$ нүктесі L түзудің кез келген нүктесі болсын. M_0 және M нүктенің радиус векторларын $\vec{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$ және $\vec{r}=(x, y, z)$ деп белгілейік. $\overline{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ векторы L түзудің бойында жатыр және ол $\vec{a}$ векторына параллель. $\vec{r}_0, \vec{r}$ және



23-сурет

$\overline{M_0M}$ үш векторлардың арасында мынандай байланыс бар (23-сурет).

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overline{M_0M} \quad (26.1)$$

$\overline{M_0M}$ векторы $\vec{a}$ векторына параллель болғандықтан $\overline{M_0M}=t\vec{a}$, мұндағы t әртүрлі сандық мән қабылдайтын параметр. Енді (26.1) формуланы былай жазуға болады

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} \quad (26.2)$$

(26.2) формула түзудің *векторлық түріндегі* теңдеуі деп аталады. Егерде $\vec{r}=(x, y, z)$, $\vec{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$, $t\vec{a}=(ta_1, ta_2, ta_3)$ екендігін ескерсек (26.2) формуланы координаттар арқылы жазуға болады

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (ta_1, ta_2, ta_3) \Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + ta_1, y_0 + ta_2, z_0 + ta_3)$$

Соңғы теңдіктен мынадай теңдеулер аламыз

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + a_1 t \\ y &= y_0 + a_2 t \\ z &= z_0 + a_3 t \end{aligned} \right\} \quad t \in (-\infty; +\infty) \quad (26.3)$$

(26.3) теңдеулер түзудің *параметрлік түріндегі теңдеулері* деп аталады.

$\overline{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ және $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ векторлары коллинеарлы болғандықтан мына қатынастарды аламыз

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (26.4)$$

(26.4) теңдіктер L түзудің кеңістіктегі *канондық теңдеулері* деп аталады.

Әрине бұл теңдеулерді (26.3) теңдіктерден t параметрін жойып та тапқан болар едік.

Енді L түзудің $M_1(x_1, y_1, z_1)$ және $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін теңдеуін табу керек. Бұл жағдайда $\overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ векторы L түзудің бағыттауыш векторы болатындығы анық. Сондықтан $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$. Ал L түзуі M_1 нүктесі арқылы өтетін болғандықтан (26.4) формула бойынша

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (26.5)$$

(26.5) теңдіктер *екі нүкте арқылы өтетін* кеңістіктегі түзудің теңдеулері деп аталады.

Бізге Π_1 және Π_2 екі жазықтықтың жалпы түрдегі теңдеулері берілсін

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (26.6)$$

Егерде $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ болса, онда екі жазықтық бір-біріне параллель болады,

егерде $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ болса, онда (26.6) теңдеулер тек бір жазықтықтың теңдеуі болады. Бұл екі шарт орындалмаса екі жазықтық бір түзудің бойымен қиылысады. Сондықтан (26.6) теңдеулер жүйесі L түзудің кеңістіктегі *жалпы түрдегі теңдеулері* деп аталады.

Бұл жағдайда мына анықтауыштардың

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad \text{және} \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

біреуі нөлге тең емес. Сонымен $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ нөлге тең болмасын.

Онда (26.6) теңдеулер жүйесінен x және y белгісіздері z арқылы табуға болады, яғни

$$\begin{cases} x = \alpha_1 z + \alpha_2 \\ y = \beta_1 z + \beta_2 \end{cases} \quad (26.7)$$

$$\text{Осыдан } z = \frac{x - \alpha_2}{\alpha_1}, \quad z = \frac{y - \beta_2}{\beta_1}. \Leftrightarrow$$

$$\frac{x - \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{y - \beta_2}{\beta_1} = \frac{z}{1} \quad (26.8)$$

Бұл $(\alpha_2, \beta_2, 0)$ нүктесі арқылы өтетін бағыттауыш векторы $\vec{a} = (\alpha_1, \beta_1, 1)$ болатын түзудің теңдеулері.

Мысал 1. $M(3, 2, 1)$ нүктеден өтетін $2x - 3y - z + 2 = 0$ жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеулерін табыңдар.

Шешімі: Берілген жазықтықтың нормаль векторы іздестіріп отырған түзуге бағыттауыш вектор болады. Олай болса, берілген M нүктеден өтетін бағыттауыш векторы $\vec{N}(2, -3, -1)$ болатын түзудің теңдеулері (26.4) бойынша

$$\text{былай анықталады } \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{-1}.$$

Мысал 2. L түзуінің теңдеулері жалпы түрде берілген

$$L: \begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad (26.9)$$

Осы түзудің канондық теңдеулерін жазыңдар.

Шешімі: (26.9) теңдеулер жүйесінен x және y белгісіздерді z арқылы өрнектеп мынаны аламыз

$$5x = 7 - 3z, \text{ осыдан } z = \frac{5x-7}{-3}, \quad 5y = 4z - 1, \text{ осыдан } z = \frac{5y+1}{4}.$$

$$\frac{5x-7}{-3} = \frac{5y+1}{4} = \frac{z}{1} \quad \text{немесе} \quad \frac{x-\frac{7}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{y+\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{z}{1} \quad \text{немесе} \quad \frac{x-\frac{7}{5}}{-3} = \frac{y+\frac{1}{5}}{4} = \frac{z}{5}.$$

§27. Түзулердің арасындағы бұрыш

Кеңістікте L_1 және L_2 түзулері канондық теңдеулері арқылы берілсін

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3} \quad \text{және} \quad \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}.$$

Бұлардың бағыттауыш векторлары сәйкес $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ және $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Екі түзудің арасындағы бұрыш екі бағыттауыш вектордың арасындағы бұрышқа тең. Сондықтан екі вектордың скалярлық көбейтіндісінің анықтамасынан, мына формуланы аламыз

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \quad \text{осыдан} \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|},$$

$$\text{немесе} \quad \cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (27.1)$$

Егер екі түзу перпендикуляр болса, онда $\cos \varphi = 0$. Сондықтан

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \quad (27.2)$$

Егер екі түзу параллель болса, онда екі бағыттауыш векторлар коллинеарлы болады. Сондықтан олардың координаттары пропорционалды болады

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \quad (27.3)$$

Мысал. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3}$ және $\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$ екі түзудің арасындағы

бұрышты табу керек.

Шешімі. Бірінші түзудің бағыттауыш векторы $\vec{a} = (2, -1, 3)$, ал екінші түзудің бағыттауыш векторы былай анықталады $\vec{b} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$, мұндағы $\vec{N}_1(2, 1, -1)$, $\vec{N}_2(2, -1, 3)$. Сонымен

$$\begin{aligned} \vec{b} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(3-1) - (6+2)\vec{j} + (-2-2)\vec{k} = \\ &= 2\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k} = (2; -8; -4). \end{aligned}$$

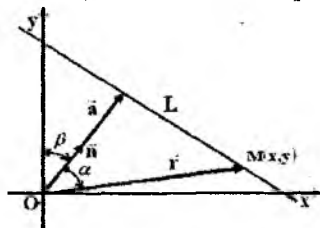
(27.1) формулаға $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = -8$, $b_3 = -4$ мәндерін қойып, $\cos \varphi$ -ді табамыз.

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 8 - 3 \cdot 4}{\sqrt{4 + 1 + 9} \sqrt{4 + 64 + 16}} = \frac{0}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{84}} = 0,$$

$$\cos \varphi = 0 \quad \text{осыдан} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

§28. Жазықтықтағы түзудің теңдеулері

Жазықтықтағы тік бұрышты координат жүйесінде L түзуі берілсін. Басы O нүктеде жатқан $\vec{a}$ векторының соңғы нүктесінен осыған перпендикуляр L түзуі жүргізілген (24-сурет). Сондықтан $\vec{a}$ векторы L түзуін толық анықтайды. p саны $\vec{a}$ вектордың ұзындығы ($p = |\vec{a}|$). Мұндағы $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ векторы $\vec{a}$ векторының бірлік векторы. α және β бұрыштары $\vec{n}$ векторының Ox және Oy өстерімен жасайтын бұрыштары ($\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$). $M(x, y)$ нүктесі L түзудің кез келген нүктесі, оның радиус векторын $\vec{r} = (x, y)$ деп белгілейміз. L түзудің кез келген нүктесінің радиус векторының $\vec{n}$ бірлік вектор бағытындағы проекциясы тұрақты және ол p -ға тең. Сонымен



24-сурет

$$(\vec{r}, \vec{n}) = p \quad (p \geq 0) \quad (28.1)$$

(28.1) теңдеу жазықтықтағы L түзудің *векторлық теңдеуі* деп аталады. Бұл теңдеу координаттар арқылы былай жазылады

$$x \cos \alpha + y \cos \beta = p \quad (p \geq 0) \quad (28.2)$$

(28.2) теңдеуді жазықтықтағы L түзудің *нормаль түріндегі теңдеуі* деп аталады. Бұл теңдеудің екі жағын нөлден өзге кез келген санға көбейтсек нәтижесінде (28.2) теңдеуге эквивалентті L түзудің теңдеуін аламыз. Сонымен

$$Ax + By + C = 0 \quad (28.3)$$

(28.3) теңдеу жазықтықтағы түзудің *жалпы түрдегі теңдеуі* деп аталады. Бұл теңдеуді әрқашанда нормальді түрге келтіруге болады оны мына санға көбейтіп

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (28.4)$$

M саны нормалаушы көбейткіш деп аталады. M -ның таңбасы C санының таңбасына қарама-қарсы, себебі $P = -MC \geq 0$ оң сан болуы керек. $(MA)^2 + (MB)^2 = 1$ болғандықтан $\cos \alpha = MA, \cos \beta = MB$. Олай болса $\vec{n} = (MA, MB)$, ал $\vec{N} = (A, B)$ векторы L түзуіне перпендикуляр, себебі ол $\vec{n}$ векторына коллинеарлы, шынында да $\vec{n} = (MA, MB) = M(A, B) = M\vec{N}$. Сондықтан $\vec{N}$ векторын L түзудің нормалі деп атайды. Өздерің көріп отырғандай жазықтықтағы түзудің теңдеулерін кеңістіктегі жазықтықтың теңдеулерінің дербес түрі деп қарастыруға болады. Сондықтан кеңістіктегі жазықтықтың теңдеулерінен жасалған барлық тұжырым жазықтықтағы түзулердің теңдеулеріне де дұрыс.

Түзудің жалпы теңдеуінің дербес түрлері:

1. Егер $A = 0$ болса, онда (28.3) теңдеуі мына түрге келеді $y = -\frac{C}{B}$. Бұл OX өсіне параллель түзудің теңдеуі;
2. Егер $B = 0$ болса, онда $x = -\frac{C}{A}$ түзуі OY өсіне параллель;
3. Егер $C = 0$ болса, онда $Ax + By = 0$ теңдеуі бас нүкте $O(0,0)$ арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

(28.3) теңдеуді мына түрге де келтіруге болады, егер $B \neq 0$,

$$y = kx + b \quad (28.5)$$

мұндағы $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. (28.5) теңдеуді мектептен белгілі түзудің *бұрыштық теңдеуі* деп аталады. Мұндағы $k = \operatorname{tg} \alpha$ бұрыштық коэффициент, ал α L түзуі мен OX өсінің оң бағытының арасындағы бұрыш.

Егер A, B, C нөлге тең болмаса (28.3) теңдеуді мына түрде де жазуға болады

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (28.6)$$

Мұндағы $a = -\frac{\bar{N}}{A}$, $b = -\frac{\bar{N}}{B}$, (28.6) теңдеу түзудің кесіндідегі теңдеуі деп аталады. Бұл түзу OX өсін a нүктесінде, OY өсін b нүктеде қиып өтеді.

Екі түзуді қарастырайық

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (L_1) \quad (28.7)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \quad (L_2) \quad (28.8)$$

$\bar{N}_1 = (A_1, B_1)$, $\bar{N}_2 = (A_2, B_2)$ векторлар осы екі түзудің сәйкес нормаль векторлары. Екі түзудің арасындағы бұрыш осы екі $\bar{N}_1$ және $\bar{N}_2$ векторлардың арасындағы бұрышқа тең. Скалярлық көбейтіндінің бірінші анықтамасынан

$$\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2 = |\bar{N}_1| |\bar{N}_2| \cos \varphi \quad \text{осыдан} \quad \cos \varphi = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| |\bar{N}_2|},$$

$$\text{немесе} \quad \cos \varphi = \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (28.9)$$

Егер L_1 және L_2 перпендикуляр болса, онда олардың нормальдары да перпендикуляр болады, яғни

$$\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2 = 0 \quad \text{осыдан} \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (28.10)$$

(28.10) теңдік екі түзудің перпендикуляр болу шарты. Егер $L_1 \parallel L_2$ параллель болса, онда $\bar{N}_1$ және $\bar{N}_2$ коллинеарлы векторлар, яғни

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \quad (28.11)$$

(28.11) теңдік екі түзудің параллель болу шарты. L_1 және L_2 түзулер бұрыштық теңдеулер арқылы берілсін, яғни

$$\left. \begin{aligned} y &= k_1 x + b_1 \\ y &= k_2 x + b_2 \end{aligned} \right\} \quad (28.12)$$

Онда (28.12) теңдеулерді жалпы түрге келтіріп былай жазуға болады

$$\left. \begin{aligned} k_1 x - y + b_1 &= 0 \\ k_2 x - y + b_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28.13)$$

$$A_1 = k_1, B_1 = -1, C_1 = b_1, A_2 = k_2, B_2 = -1, C_2 = b_2.$$

Екі түзудің перпендикуляр болу шарты (28.10) мынандай болады

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad \text{осыдан} \quad k_1 k_2 + 1 = 0 \quad \text{немесе}$$

$$k_1 k_2 = -1 \quad (28.14)$$

Екі түзудің параллель болу шарты (28.11) былай жазылады

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \quad \text{осыдан} \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{-1}{-1} \quad \text{немесе}$$

$$k_1 = k_2 \quad (28.15)$$

(28.14) пен (28.15) шарттар бұрыннан белгілі.

Егер (28.3) түзу $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтсе, онда

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \quad (28.16)$$

теңдігі дұрыс. (28.3) теңдіктен (28.16)-ті алып мына теңдікті аламыз

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (28.17)$$

Егер $B \neq 0$, (28.17) теңдікті былай жазуға болады

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (28.18)$$

мұндағы $k = -\frac{A}{B}$. (28.17) және (28.18) теңдеулерді түзудің бір нүкте арқылы өтетін теңдеулері деп аталады. Екі $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі де осылайша анықталады

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (28.19)$$

нүктеден жазықтықтағы түзуге дейінгі ара қашықтықта нүктеде жазықтықтың ара қашықтықтың дербес түрі ретінде қорытылады, сонымен $Ax + By + C = 0$ түзуімен $M_0(x_0, y_0)$ нүктенің ара қашықтығы

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (28.20)$$

Мысал. $M_0(2, -1)$ нүктеден $3x + 4y - 22 = 0$ түзуге дейінгі ара қашықтықты табу керек.

Шешімі. (28.20) формула бойынша $A = 3, B = 4, C = -22$. $x_0 = 2; y_0 = -1$.

$$\text{Олай болса } d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 22|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4.$$

§29. Екінші ретті қисық сызықтар

Дәрежелері екінші ретті болатын теңдеулермен анықталатын сызықтарды қарастырайық

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (29.1)$$

Бұл теңдеудің коэффициенттері нақты сандар және ең кем дегенде A, B немесе C -ның біреуі нөлге тең емес. Мұндай сызықтарды *екінші ретті сызықтар* (қисықтар) деп атайды.

Канондық теңдеулермен берілген кейбір қисықтарды қарастырайық.

$$1. \text{ Шеңбер} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (R > 0) \quad (29.2)$$

$$2. \text{ Эллипс} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, a \geq b) \quad (29.3)$$

$$3. \text{ Гипербола} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \quad (29.4)$$

$$4. \text{ Парабола} \quad y^2 = 2px \quad (p > 0) \quad (29.5)$$

1. Шеңбер. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ шеңбердің канондық теңдеуі.

Анықтама. M_0 нүктеден бірдей R қашықтықтағы нүктелердің геометриялық орнын радиусы R -ге тең центрі M_0 нүктеде жататын *шеңбер* деп атайды.

Шеңбердің канондық теңдеуін 25-суреттен табамыз. ΔM_0MK -дан

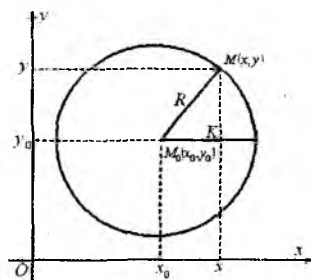
$$|M_0M| = \sqrt{(M_0K)^2 + (MK)^2}. \quad M_0K = x - x_0, \quad MK = y - y_0,$$

$M_0M = R$ онда

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \text{ осыдан } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Егер $x_0 = 0; y_0 = 0$ болса, онда центрі бас нүкте болатын шеңбердің теңдеуі

$$x^2 + y^2 = R^2$$



25-сурет

$$2. \text{ Эллипс.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, a \geq b) \quad (29.3) \text{ эллипстің канондық}$$

теңдеуі.

Эллипстің канондық теңдеуі x және y -тің тек жұп дәрежесінен тұратын болғандықтан, егер (x, y) нүктесі осы эллипстің нүктесі болса, онда $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ нүктелері де осы эллипстің нүктелері болады. Сондықтан эллипс Ox және Oy өстеріне симметриялы болады, сонымен қатар эллипс бас нүктеге де $O(0, 0)$ -де симметриялы. $(-a, 0), (a, 0), (0, b), (0, -b)$ нүктелері эллипстің төбелері, $O(0, 0)$ нүктесі эллипстің центрі. a - эллипстің үлкен жарты өсі, b - кіші жарты өсі деп аталады. Егер $a = b$ болса, онда эллипс шеңберге айналады $x^2 + y^2 = a^2$. (29.3) теңдеудің сол жағындағы әрбір қосылғыш бірден аспайды, яғни $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ және $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ немесе $-a \leq x \leq a$ және $-b \leq y \leq b$.

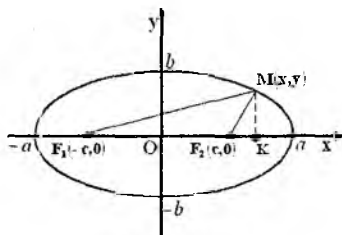
Сондықтан эллипстің барлық нүктелері $x = \pm a, y = \pm b$ түзулерден тұратын төртбұрыш ішінде жатады.

(29.3) теңдеудегі теріс емес қосылғыштардың $\frac{x^2}{a^2}$ және $\frac{y^2}{b^2}$ қосындысы

бірге тең.

Сондықтан, егер бір қосылғыш өссе екінші қосылғыш кемиді, яғни $|x|$ өссе онда $|y|$ кемиді және керісінше. Сонымен эллипстің графигі 26-суреттей болады.

(29.3) теңдеудегі теріс емес қосылғыштардың $\frac{x^2}{a^2}$ және $\frac{y^2}{b^2}$ қосындысы бірге тең. Сондықтан, егер бір қосылғыш өссе екінші қосылғыш кемиді, яғни $|x|$ өссе онда $|y|$ кемиді және керісінше. Сонымен эллипстің графигі 26-суреттей болады.



26-сурет

$$c^2 = a^2 - b^2 \text{ деп белгілейік. } \varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

эллипстің эксцентриситеті деп аталады. ($0 < \varepsilon < 1$). $F_1(-c, 0)$ және $F_2(c, 0)$ эллипстің фокустері, ал эллипстің фокусінен кез келген нүктесіне дейінгі қашықтықтарды ($r_1 = F_1M, r_2 = F_2M$) M нүктесінің фокальдық радиустері деп атайды.

Анықтама. Фокустар деп аталатын екі F_1 және F_2 нүктеден ара қашықтықтарының қосындысы тұрақты, $2a$ болатын, жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орнын *эллипс* дейді, яғни

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (29.7)$$

Эллипстің канондық теңдеуін осы (29.7)-ден қорытып шығаруға болады. $M(x, y)$ эллипстің кез келген нүктесі. 26-суреттегі F_1MK тікбұрышты үшбұрыштан $r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, ал F_2MK үшбұрыштан $r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Бұл өрнектерді (29.7) формулаға қойсақ мына өрнекті аламыз.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (29.8)$$

(29.8) формуланы былай түрлендіреміз $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, екі жағын квадраттап $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$. Осыдан

$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$, $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$, тағы да екі жағын квадраттаймыз

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

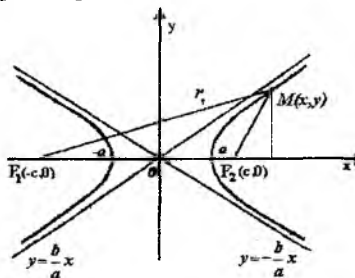
$$c^2 = a^2 - b^2 \text{ болғандықтан } b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ немесе } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

бұл теңдеу эллипстің канондық теңдеуі.

3. Гипербола. Гиперболаның канондық теңдеуі

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \quad (29.4)$$

(29.4) теңдікте x және y -тің дәрежелері жұп. Сондықтан гипербола Ox және Oy өстеріне симметриялы, сонымен қатар гипербола $O(0,0)$ бас нүктеге де симметриялы. Ox өсіндегі $(a,0)$, $(-a,0)$ нүктелері гиперболаың төбелері деп, $O(0,0)$ - гиперболаың центрі, Ox өсі гиперболаың нақты өсі, Oy - жорымал өсі, a - нақты жарты өсі, b - жорымал жарты өсі деп аталады. Ал $y = \pm \frac{b}{a}x$ түзулері гиперболаың көлбеу асимптоталары болатындығын дәлелдеуге болады. $c^2 = a^2 + b^2$ деп белгілесек, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ өрнекті гиперболаың эксцентриситеті деп атайды. $F_1(-c,0)$ және $F_2(c,0)$ нүктелері гиперболаың фокустері, $r_1 = F_1M$ және $r_2 = F_2M$ гиперболаың M нүктесінің фокальдық радиустері деп аталады, мұндағы M гиперболаың кез келген нүктесі (27-сурет).



27-сурет

триситеті деп атайды. $F_1(-c,0)$ және $F_2(c,0)$ нүктелері гиперболаың фокустері, $r_1 = F_1M$ және $r_2 = F_2M$ гиперболаың M нүктесінің фокальдық радиустері деп аталады, мұндағы M гиперболаың кез келген нүктесі (27-сурет).

Анықтама. Фокустар деп аталатын екі F_1 және F_2 нүктеден ара қашықтықтарының айырымының абсолют шамасы тұрақты, $2a$ болатын, жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орнын **гипербола** деп атайды, яғни

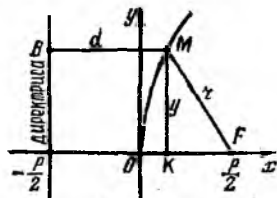
$$|r_1 - r_2| = 2a \quad (29.9)$$

(29.9) формуланы пайдаланып 27-суреттен $r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ екендігін ескеріп гиперболаың канондық теңдеуінің (29.4)-ке тең екендігін дәлелдеуге болады.

4. Парабола. Параболаың канондық теңдеуі

$$y^2 = 2px \quad (p > 0) \quad (29.5)$$

Бұл теңдеудегі айнымалы y -тің дәрежесі жұп, сондықтан парабола Ox өсіне симметриялы (28-сурет). $O(0,0)$ нүктесі параболаың төбесі, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ нүктесі параболаың фокусі, $r = |FM|$ параболаың M нүктесінің фокальдық радиусі деп аталады, мұндағы $M(x,y)$ параболаың кез келген нүктесі (28-сурет).



28-сурет

Анықтама. F фокустен және директриса деп аталатын түзуден ара қашықтықтары бірдей болатын нүктелердің геометриялық орнын **парабола** деп атайды, яғни

$$r = d \quad (29.10)$$

(29.10) теңдікті пайдаланып 28-суреттен $r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, $d = \frac{p}{2} + x$ екендігін ескеріп параболаның канондық теңдеуі (29.5) болатындығын дәлелдеуге болады.

§30. Екінші ретті қисық сызықтың жалпы теңдеуін канондық түрге келтіру

Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуі берілсін

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (30.1)$$

Бұл теңдеуді координат өстерін α бұрышқа бұру арқылы x және y айнымалылардың көбейтіндісі болмайтындай етіп түрлендіруге болады. Ол үшін координат өстерін мына формулалар арқылы бұрайық

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (30.2)$$

мұндағы x' және y' жаңа координат өстері. Бұл формулаларды (30.1)-ге қойып, мынандай өрнек аламыз

$$A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2B(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + C(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + 2D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 2E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0$$

Бұл формуланы түрлендіріп мына түрге келтіруге болады

$$\begin{aligned} & (A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha)x'^2 + (-2A \cos \alpha \sin \alpha + 2B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \\ & + 2C \sin \alpha \cos \alpha)x'y' + (A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha)y'^2 + 2(D \cos \alpha + E \sin \alpha)x' + \\ & + 2(-D \sin \alpha + E \cos \alpha)y' + F = 0 \end{aligned} \quad (30.3)$$

α бұрышын солай таңдап аламыз, (30.3)-гі екінші жақша нөл болатындай етіп яғни

$$-2A \cos \alpha \sin \alpha + 2B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2C \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad \text{осыдан}$$

$$2B \cos 2\alpha + (C - A) \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2B}{A - C} \right). \quad (30.4)$$

Координат өстерін осындай α бұрышына бұрған кезде, (30.1) теңдеу мына түрге келеді

$$A_1 x'^2 + C_1 y'^2 + 2D_1 x' + 2E_1 y' + F_1 = 0 \quad (30.5)$$

мұндағы $A_1 = A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha$,

$C_1 = A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha$, $D_1 = D \cos \alpha + E \sin \alpha$, $E_1 = E \cos \alpha - D \sin \alpha$,

$F_1 = F$. $A_1^2 + C_1^2 \neq 0$ болмасын, яғни A_1 және C_1 бір мезгілде нөл болмасын.

Теорема. (30.5) теңдеу әрқашанда шеңберді (егер $A_1 = C_1$), немесе эллипсті (егер $A_1 \cdot C_1 > 0$), немесе гиперболаны (егер $A_1 \cdot C_1 < 0$), немесе параболаны ($A_1 \cdot C_1 = 0$) анықтайды. Мүмкін өзгеше жағдай да болуы мүмкін: эллипстен (шеңберден) өзгеше – нүктеге немесе жорамал эллипске немесе шеңберге, ал гиперболодан өзгеше қиылысатын екі түзуге, ал параболадан өзгеше параллель екі түзуге айналулары мүмкін.

(Бұл теореманы дәлелдемейміз).

Мысал 1. $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$. эллипс ($A_1 \cdot C_1 = 4 \cdot 5 > 0$).

Бұл теңдеуді былай түрлендіреміз

$$4\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 5(y^2 - 6y + 9) - 25 - 45 + 10 = 0.$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(y - 3)^2 = 60. \quad \frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{15} + \frac{(y - 3)^2}{12} = 1.$$

Бұл центрі $O_1\left(-\frac{5}{2}, 3\right)$ және жарты өстері $a = \sqrt{15}$, $b = \sqrt{12}$ болатын эллипстің канондық түрі.

Мысал 2. $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$ парабола, ($C = 0$).

Бұл теңдеуді түрлендіріп параболаның канондық түрін аламыз

$$(x^2 + 10x + 25) - 2y + 11 - 25 = 0, \quad (x + 5)^2 = 2y + 14. \quad (x + 5)^2 = 2(y + 7).$$

Төбесі $O_1(-5, -7)$ нүкте және $p = 1$ болатын параболаның канондық теңдеуі.

Мысал 3. $4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0$. ($A \cdot C = -4 < 0$).

Теңдеуді түрлендіреміз

$$4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 8y + 16) - 4 + 16 - 12 = 0. \quad (2(x + 1) + (y + 4))(2(x + 1) - (y + 4)) = 0. \\ (2x + y + 6)(2x - y - 2) = 0.$$

Бұл теңдеу бір-бірімен қиылысатын $2x + y + 6 = 0$ және $2x - y - 2 = 0$ түзулерін анықтайды.

§31. Кеңістіктегі беттердің теңдеулері

Кеңістіктегі беттердің жалпы теңдеуі былай беріледі

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^3 b_i x_i + B = 0 \quad (31.1)$$

Мұндағы $a_{ij} = a_{ji}$, b_i , B берілген тұрақты сандар, x_1, x_2, x_3 – кеңістіктегі айнмалылар. $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ деп белгілеп беттердің канондық түрде берілген дербес түрлерін қарастырайық.

1. Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (R > 0)$$

2. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0)$$

- | | | |
|---|---|-----------------|
| 3. Бір қуысты гиперboloид | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ | $(a, b, c > 0)$ |
| 4. Екі қуысты гиперboloид | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ | $(a, b, c > 0)$ |
| 5. Эллиптикалық параболоид | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ | $(a, b, p > 0)$ |
| 6. Гиперболалық параболоид | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ | $(a, b, p > 0)$ |
| 7. Екінші ретті конус | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ | $(a, b, c > 0)$ |
| 8. Эллиптикалық цилиндр | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $(a, b > 0)$ |
| 9. Гиперболалық цилиндр | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $(a, b > 0)$ |
| 10. Параболалық цилиндр | $y^2 = 2px$ | $(p > 0)$ |
| 11. Өзара қиылысатын екі жазықтық | $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ | $(a, b > 0)$ |
| 12. Параллель немесе беттесетін екі жазықтықтың | $x^2 - a^2 = 0$ | $(a > 0)$ |
| 13. OZ өсі | $x^2 + y^2 = 0$ | |
| 14. Бас нүкте $O(0,0,0)$ | $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ | |

1. Сфера. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (R > 0)$ (31.2)

(31.2) центрі $O(0,0,0)$ бас нүкте радиусы R болатын сфераның канондық теңдеуі (29-сурет). Енді сфераның геометриялық түрін қима әдісі көмегімен зерттейік. Сфераның канондық теңдеуіндегі x, y, z айнымалылардың дәрежелері жұп, сондықтан сфераның беті $x = 0, y = 0, z = 0$ координат жазықтықтарына симметриялы. Сфераны $z = h, (|h| \leq R)$ жазықтықтарымен қиғанда, қимасынан шеңбер аламыз. Шынында да $x^2 + y^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 - h^2, R_1^2 = R^2 - h^2 > 0$, олай болса $x^2 + y^2 = R_1^2$. Теңдеуі радиусы $R_1 = \sqrt{R^2 - h^2}$ тең шеңбердің теңдеуі. Тура осылай сфераны $x = h, (|h| \leq R)$ және $y = h, (|h| \leq R)$ координат жазықтықтарына параллель жазықтықтарымен қиғанда да қимасынан сәйкес $y^2 + z^2 = R_1^2, x^2 + z^2 = R_1^2$ шеңберлер шығады.

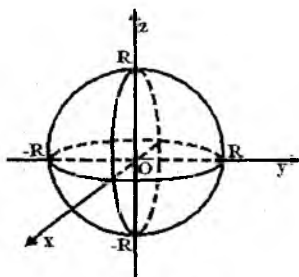
2. Эллипсоид. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0)$ (31.3)

(31.3) теңдеуі эллипсоидтың канондық теңдеуі (31.3) теңдеуде x, y, z -тің дәрежелері жұп болғандықтан эллипсоид $x = 0, y = 0, z = 0$ координат жазықтықтарына бас нүктеге $O(0,0,0)$ симметриялы бет болады. Эллипсоид бетінің геометриялық түрін білу үшін қима әдісін қолданамыз. Бетті OXY жазық-

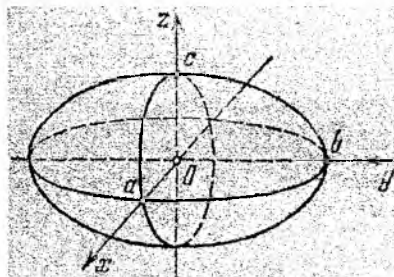
тығына параллель $z=h$, ($|h| \leq C$) жазықтықтарымен қисақ, қимасынан эллипс қимасынан эллипс шығады (30-сурет):

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$. Бұл қиманың жарты өстері $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ және $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ тең. Тура осылай эллипсоидты $x=h$, ($|h| \leq a$) және $y=h$, ($|h| \leq b$) жазықтықтарымен қиғанда да, қимасынан эллипстер шығады. Егер эллипсоидты $x=0$, $y=0$, $z=0$ жазықтық-тармен қисақ, қимасынан эллипстер шығады:

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ал $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ нүктелері эллипсоидтың төбелері деп аталады. Егер $a=b=c$ болса эллипсоид теңдеуі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ болатын сфераға айналады.



29-сурет



30-сурет

3. Біркуысты гиперболоид. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a, b, c > 0$) (31.4)

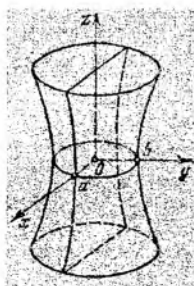
(31.4) бір қуысты гиперболоидтың канондық теңдеуі. Бір қуысты гиперболоид $x=0$, $y=0$ және $z=0$ координат жазықтықтарына және $O(0,0,0)$ бас нүктеге симметриялы. a, b, c сандары бірқуысты гиперболоидтың жарты өстері деп аталады. $(\pm a, 0, 0)$ және $(0, \pm b, 0)$ нүктелері бір қуысты гиперболоидтың төбелері деп аталады. (31-сурет). Егер бетті кез келген $z=h$ жазықтықпен қисақ, қимасынан әрқашанда эллипс шығады $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$. Егер бетті $x=h$

немесе $y=h$ жазықтықтармен қисақ, қимасынан гиперболалар шығады:

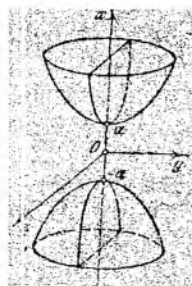
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \quad \text{немесе} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

4. Екі қуысты гиперболоид. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a, b, c > 0$) (31.5)

(31.5) екі қуысты гиперболоидтың канондық теңдеуі. Теңдеудің түріне қарап бұл беттің де $x=0$, $y=0$, $z=0$ координат беттеріне және $O(0,0,0)$ бас нүктеге симметриялы екендігін байқауға болады. (32-сурет). Егер (31.5) екі қуысты



31-сурет



32-сурет

гиперболоидты $x = h$ ($|h| > a$) жазықтықтармен қисақ, қимасынан жарты өстері

$b_0 = b\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}$ және $c_0 = c\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}$ тең эллипс аламыз, яғни $\frac{y^2}{b_0^2} + \frac{z^2}{c_0^2} = 1$. Егер бетті

$z = h$ немесе $y = h$ кез келген жазықтықтармен қисақ, қимасынан мынандай гиперболалар шығады, яғни

$$\frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2} = 1 \quad \left(a_0 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, b_0 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \right) \text{ немесе } \frac{x^2}{a_0^2} - \frac{z^2}{c_0^2} = 1 \quad \left(a_0 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \right.$$

$$c_0 = c\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}} \left. \right). (\pm a, 0, 0) \text{ нүктелері екі қуысты гиперболоидтың төбелері деп}$$

аталады.

5. Эллиптикалық параболоид. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad (a, b, p > 0) \quad (31.6)$

(31.6) эллиптикалық параболоидтың канондық теңдеуі. Бұл теңдеуден беттің тек $x=0$ және $y=0$ координат жазықтықтарына симметриялы екендігін көреміз, себебі x және y айнымалылардың дәрежесі жұп. (31.6) бетті $z=h$ ($h>0$) жазық-

тарымен қисық қимасынан эллипс аламыз (33-сурет). $\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1 \quad (a_0 = a\sqrt{2ph},$

$b_0 = b\sqrt{2ph})$. Осы бетті $x=h$ немесе $y=h$ кез келген жазықтармен қисақ

қимасынан әрқашанда мынандай параболалар шығады, яғни $\frac{y^2}{b^2} = 2pz - \frac{h^2}{a^2}$

немесе $\frac{x^2}{a^2} = 2pz - \frac{h^2}{b^2}$. Бас нүкте $O(0,0,0)$ эллиптикалық параболоидтың төбесі

деп аталады.

6. Гиперболалық параболоид. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad (a, b, p > 0) \quad (31.7)$

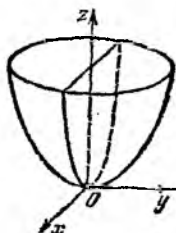
(31.7) эллиптикалық параболоидтың канондық теңдеуі. (34-сурет). Берілген бет $x=0$ және $y=0$ координат жазықтықтарына симметриялы. $z=h$ жазықтарымен қисық, қимасынан гипербола аламыз

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2ph.$$

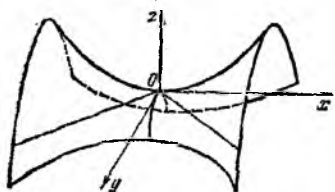
Егер $h > 0$ болса, онда гиперболаның нақты өсі OX болады, ал егер $h < 0$ болса, онда нақты өсі OY болады. Егер $h = 0$ болса, қимасынан қиылысатын екі түзу шығады. Осы бетті $x = h$ немесе $y = h$ жазықтықтармен қисақ, тармақтары

төмен немесе жоғары бағытталған параболалар шығады, яғни $\frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2} - 2pz$ немесе $\frac{x^2}{a^2} = 2pz + \frac{h^2}{b^2}$.

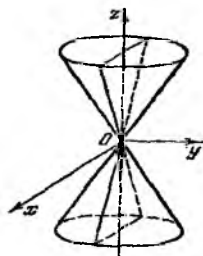
7. Екінші ретті конус. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (a, b, c > 0)$ (31.8)



33-сурет



34-сурет



35-сурет

(31.8) формула екінші ретті конустың канондық теңдеуі (35-сурет). Берілген бет $x = 0$, $y = 0$ және $z = 0$ координат жазықтықтарына және $O(0, 0, 0)$ бас нүктеге симметриялы. Осы бетті $z = h$ жазықтығымен қисақ қимасы эллипс болады,

яғни $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$. Егер осы бетті $x = h$ немесе $y = h$ жазықтықтармен қисақ,

қимасынан гиперболалар аламыз $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2}$ немесе $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2}$. Конусты $x = 0$ немесе $y = 0$ жазықтықтарымен қисақ қимасы өзара қиылысатын екі түзу

болады $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ немесе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

8. Эллиптикалық цилиндр. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$ (31.9)

(31.9) теңдеуде z айнымалысы жоқ. XOY жазықтығына (31.9) теңдеуі жарты эстері a және b -ға тен эллипсті анықтайды.

Егер (x, y) нүктесі осы эллипсте жатса, онда z -і кез келген (x, y, z) нүкте (31.9) беттің үстінде жатады (36-сурет). Сонымен OZ өсіне параллель осындай нүктелердің жиыны эллиптикалық цилиндрлік бетті құрайды. Бұл бет XOY

жазықтығын $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипспен қияды. Бұл эллипс цилиндрдің бағыттауыш сызығы деп, ал беттің үстінде жатқан OZ өсіне параллель түзулер осы беттің

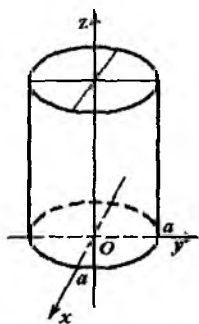
жасаушылары деп аталады. Егерде осы цилиндрді $x = h$, ($|h| \leq a$) немесе $y = h$, ($|h| \leq b$) жазықтықтарымен қисақ, қимасынан жасаушы түзулер аламыз, яғни $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}$ немесе $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$.

9. Гиперболаалық цилиндр. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) (31.10)

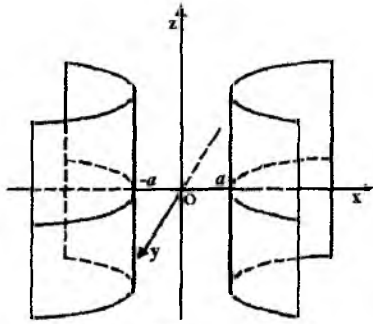
(31.10) теңдеу гиперболаның цилиндрлік беттің канондық теңдеуі (37-сурет). Бұл беттің бағыттауыш сызығы (31.10) гипербола болады.

10. Параболаалық цилиндр. $y^2 = 2px$ ($p > 0$) (31.11)

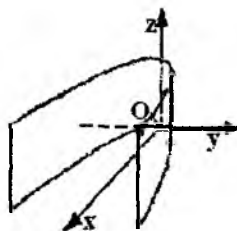
Бұл параболаалық цилиндрдің бағыттауыш сызықтары парабола болады. OZ өсіне параллель осы беттің үстінде жатқан түзулер осы цилиндрдің жасаушылары деп аталады (38-сурет).



36-сурет



37-сурет



38-сурет

11. Өзара қиылысатын екі жазықтықтың теңдеуі

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \quad (a, b > 0) \quad (31.12)$$

Бұл беттің бағыттауыштары $y = \pm \frac{a}{b}x$ түзулері болады.

12. Параллель немесе беттесетін екі жазықтықтың теңдеуі

$$x^2 - a^2 = 0. \quad (a > 0) \quad (31.13)$$

13. $x^2 + y^2 = 0$ теңдеуді тек OZ өстің нүктелері ғана $(0, 0, z)$ қанағаттандырады, сондықтан ол OZ өстің теңдеуі. $x^2 + z^2 = 0$ OY өстің теңдеуі. $y^2 + z^2 = 0$ OX өстің теңдеуі.

14. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ теңдеуді тек $O(0, 0, 0)$ нүктенің координаттары ғана қанағаттандырады.

II тарау. МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАМҒА КІРІСПЕ

§1. Жиын ұғымы. Логикалық символдар.

Математикалық ұғымдардың ішіндегі жалпы және ең негізгі ұғымдардың бірі жиындар ұғымы. Заттардың қандайда бір белгілері бойынша бірігетін жиынтығын *жиын* деп, ал оның құрамындағы заттардың әрқайсысы жиынның элементі деп аталады.

Мысалы көлдегі балықтар бірігіп жиын құраса, онда әрбір балық осы жиынның элементі болады. Студенттер тобы жиын құрса, ондағы әрбір студент жиынның элементі болады. Жиындарды латын алфавитінің бас әріптері $A, B, C, \dots, X, Y, Z, \dots$ арқылы, ал олардың элементтерін кіші әріптермен $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$ белгілейді. Егер x элементі A жиынында жататын болса, ол былай жазылады $x \in A$, ал мына жазу $x \notin A$ немесе $x \notin A$, x элементі A жиынында жатпайтындығын көрсетеді. Бірде-бір элементі жоқ жиынды бос жиын деп атайды да, $\emptyset$ символымен белгілейді.

Егер B жиынының әрбір элементі A жиынының элементі болса, онда B жиынын A жиынының *ішжиыны* деп атайды да $B \subset A$ символымен белгілейді.

Жиындарды белгілеуде фигура жакша жиі қолданылады, жақшаның ішіне осы жиынның элементтері жазылады. Мысалы, $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ жазуы A жиыны бес элементтен 1, 2, 3, 4 және 6-дан тұратынын көрсетеді; $A = \{x: 0 \leq x \leq 2\}$ жазуы A жиынның элементтері $[0, 2]$ кесіндідегі барлық нақты сандардан тұратынын көрсетеді.

Алдағы уақытта анықтамаларды, теоремаларды т.б. ұғымдарды қысқартып жазу үшін логикалық символдар қолданылады.

Егер бізге сөйлемдердің мағынасы емес олардың бір-бірімен байланысы керек болатын болса, ондай сөйлемдерді $\alpha, \beta, \dots$ әріптерінің біреуімен белгілейіз.

Егер $\alpha \Rightarrow \beta$ болса, « α сөйлемнен β сөйлемі шығатыны» белгіленеді, сонымен «шығады», «салдары» деген сөйлемшелер $\Rightarrow$ кванторымен белгіленеді.

Егер $\alpha \Rightarrow \beta$ және $\beta \Rightarrow \alpha$ болса, онда α және β сөйлемдерін пара-пар немесе эквивалентті дейді де, $\alpha \Leftrightarrow \beta$ символымен белгілейді.

«Кез келген», «барлық», «әрбір», «қандай да болмасын» сөйлемшелер математикада бір мағынада қолданылады да, $\forall$ - кванторымен белгіленеді (бұл белгі ағылшын тіліндегі *All* сөзінің бірінші әрпінің төңкеріліп жазылуы) «Табылады», «белгілі бір», «бар болады» сөйлемшелер математикада бір мағынада қолданылады да, $\exists$ - кванторымен белгіленеді (бұл белгі ағылшын тіліндегі *Exist* сөзінің бірінші әрпінің аударылып жазылуы).

: - символымен «орын алады», «болады», «қанағаттандырады» деген сөйлемдер белгіленеді.

Мысалы. 1) « A жиынының әрбір элементі үшін α қасиеті орындалады» деген $\forall x \in A: \alpha$ түрінде жазылады. 2) « B жиыннан β қасиетін қанағаттан-

дыратын y элементі табылады» деген $\exists y \in B: \beta$ символымен белгіленеді.

$\bar{\alpha}$ символымен α -ге кері немесе « α емес» деген сөйлемді белгілейді. Енді $\forall x \in A: \alpha$ тұжырымға кері тұжырым құрайық. Кванторлар тілінде бұл былай жазылады:

$$\overline{\forall x \in A: \alpha} \Leftrightarrow \exists x \in A: \bar{\alpha}.$$

« α қасиеті барлық $x \in A$ үшін орындала бермейді» деген кемінде бір x үшін $\bar{\alpha}$ қасиеті орындалады» дегенмен пара-пар.

Дәл солай:

$$\overline{\exists y \in B: \beta} \Leftrightarrow \forall y \in B: \bar{\beta}.$$

Сонымен қарама-қарсы тұжырым құру үшін $\forall$ және $\exists$ кванторлары қолданылып тұрған сөйлемдерді өзгертпей, кванторларды өзара ауыстырып, ($\forall$ орнына $\exists$, ал $\exists$ орнына $\forall$ кванторын қою керек), ал қорытындысы болатын тұжырымды оған қарама-қарсы тұжырымға ауыстыру керек.

§2. Жиындарға қолданылатын амалдар

Егер A және B жиындары үшін $A \subset B$ және $B \subset A$ кірістірулері бірдей орындалса, яғни бірінің кез келген элементі екіншісінде жатса, онда A және B жиындарықтең дейді де $A = B$ символымен белгіленеді.

A және B жиындардың қосындысы немесе бірігуі деп элементтері ең кем дегенде A жиынында немесе B жиынында жататын $C = A + B = A \cup B$ жиынын айтады (39-сурет), яғни $C = A + B = A \cup B = \{x: x \in A \text{ немесе } x \in B\}$

$A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$ екендігі айқын.

Мысалдар. 1) $A = \{m, n, p, k, l\}$ және $B = \{p, r, s, n\}$ жиындардың бірігуі

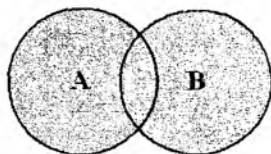
$$C = A + B = A \cup B = \{m, n, p, k, l, r, s\}.$$

2) $A = \{1, 4, 5, 6\}$ және $B = \{1, 2, 4, 6\}$ жиындардың бірігуі $C = A + B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$.

A және B жиындардың көбейтіндісі немесе қиылысуы деп элементтері бір мезгілде A жиынында және B жиынында жататын $C = A \cdot B = A \cap B$ жиынын айтады, (40-сурет) яғни

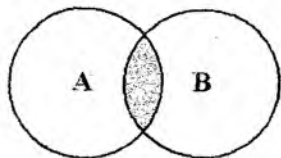
$$C = A \cdot B = A \cap B = \{x: x \in A \text{ және } x \in B\}$$

$A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$ екендігі айқын.



$$C = A + B = A \cup B$$

39-сурет



$$C = A \cdot B = A \cap B$$

40-сурет

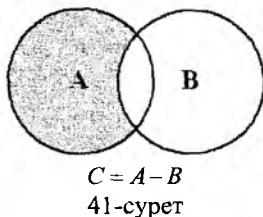
Мысалдар 1) $A = \{a, b, c, d\}$ және $B = \{c, d, l\}$. $C = A \cdot B = A \cap B = \{c, d\}$.

2) $A = \{1, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, онда екеуінің көбейтіндісі $C = A \cdot B = A \cap B = \{1, 4, 6\}$.

A және B жиындардың айырымы деп элементтері A жиынынның элементтерінен тұратын ал бірақ B жиынында жатпайтын $C = A \setminus B = A - B$ жиынын

айтады (41-сурет), яғни $C = A \setminus B = A - B = \{x: x \in A \text{ және } x \notin B\}$. $A - B \neq B - A$ екендігі айқын. Егерде $B \subset A$ болса, онда $(A \setminus B) + B = A$, жалпы жағдайды $(A \setminus B) + B \neq A$.

Мысал. $A = \{1, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, онда $C = A - B = \{5, 7\}$.



Қосу және көбейту амалдардың кейбір қасиеттері

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, коммутативті.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, ассоциативті.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, дистрибутивті.

3-қасиеттің бірінші бөлімін, яғни көбейтудің қосуға қарағандағы дистрибутивтігін дәлелдейік. Екі жиынның тең екендігін дәлелдеу үшін олардың әрқайсысының екіншісінің ішжиын болатындығын көрсетсек жеткілікті. Сонымен $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ екендігін дәлелдейміз. Ол үшін $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ болатындығын көрсетейік. $x \in A \cap (B \cup C)$ болсын. Онда $x \in A$ және $x \in B \cup C$, яғни $x \in A$ және $x \in B$ немесе $x \in C$. (Анығырақ болу үшін $x \in B$ болсын). Бұдан $x \in A \cap B$, сондықтан $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, яғни $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Енді $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ болатындығын көрсетейік. $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ болсын. Онда $x \in A \cap B$ немесе $x \in A \cap C$ болады. Анығырақ болу үшін $x \in A \cap B$ болсын. Онда $x \in A$ және $x \in B$. Яғни $x \in A \cap (B \cup C)$. Олай болса $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ болатындығы шығады. Екі жиынның теңдігінен анықтамасынан $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Қалған қасиеттері де осылай дәлелденеді.

§3. Математикалық индукция әдісі. Ньютон биномының формуласы. Бернулли теңсіздігі.

Математикалық дәлелдеудің маңызды әдістерінің бірі - математикалық индукция әдісі.

Әрбір натурал n үшін $A(n)$ тұжырымы айтылған болсын.

Егер

1) $A(1)$ орындалса

2) Әрбір натурал n үшін $A(n)$ орындалғанда $A(n+1)$ тұжырымы орындалса, онда кез келген натурал n үшін $A(n)$ тұжырымы дұрыс.

Математикалық индукция әдісін пайдаланып Ньютон биномының формуласын, яғни кез келген n оң бүтін саны үшін

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, \quad (3.1)$$

дұрыстығын дәлелдейік. Мұндағы $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ теру

сандары биномдық коэффициенттер деп аталады. Теру санының мынандай қасиеттері бар:

$C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^k = C_n^{n-k}$. (3.1) тұжырымды дәлелдеу үшін теру санының келесі қасиетін пайдаланамыз:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}, \quad (3.2)$$

(3.2) теңдігінің дұрыстығын көрсетейік

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{k+1+n-k}{k+1} = \frac{(n+1)(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

(3.1) тұжырымын $A(n)$ символымен белгілейін. $n=1$ болғанда (1) формула дұрыс, яғни $A(1)$ айқын: $(a+b)^1 = a+b = C_0^0 a + C_1^1 b$, себебі $C_0^0 = C_1^1 = 1$.

Енді $A(n)$ тұжырымы орындалсын, яғни (3.1) формула дұрыс болсын. Онда $A(n+1)$ тұжырымының орындалатындығын көрсетейік.

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \\ &+ C_n^{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1} + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n) = C_n^0 a^{n+1} + (C_n^1 + C_n^0) a^n b + (C_n^2 + C_n^1) a^{n-1} b^2 + \\ &+ \dots + (C_n^{k+1} + C_n^k) a^{n-k} b^{k+1} + \dots + C_n^n b^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \dots + \\ &+ C_{n+1}^{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \dots + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}. \end{aligned}$$

Бұнда $C_1^0 = C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = C_n^n = 1$ теңдіктері және (3.2) формуласы пайдалынады. Сонымен Ньютон биномының формуласы (3.1) кез келген n үшін дұрыс. Енді математикалық индукция әдісін пайдаланып **Бернулли теңсіздігі** деп аталатын келесі

$$(1+h)^n \geq 1+nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

теңсіздікті дәлелдейік, мұндағы $h > -1$.

$n=0$ және $n=1$ үшін (3.3) теңсіздігі орындалады, $n=0$, $(1+h)^0 = 1$; $n=1$, $(1+h)^1 = 1+h$. Енді бұл теңсіздік $n=k$ үшін дұрыс болсын, яғни $(1+h)^k \geq 1+kh$. Осы теңсіздіктің екі жағын $1+h > 0$ -ге көбейтсек

$$(1+h)^k (1+h) \geq (1+kh)(1+h) \Rightarrow (1+h)^{k+1} \geq (1+k+1)h + kh^2 \geq (1+k+1)h.$$

теңсіздігін аламыз, себебі $kh^2 > 0$ санын алып тастасақ теңсіздік күшейеді. Олай болса (3.3) теңсіздігі $n=k+1$ үшін де орындалады. Сондықтан бұл теңсіздік барлық $\forall n \in N$ үшін дұрыс.

§4. Нақты сандар жиыны

1. Негізгі ұғымдар. Математикадағы ең алғашқы және негізгі ұғымдардың бірі сан. Натурал сандар жиынын $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ деп, ал бүтін сандар жиынын

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ деп, ал рационал сандар жиынын $Q = \left\{ \frac{m}{n} \right\}$, мұндағы

$m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, деп белгілейміз. Рационал сандар ақырлы немесе ақырсыз периодты ондық бөлшек түрінде жазуға болады.

Мысалы: $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,(6)$; $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{2}{9} = 0,222... = 0,(2)$

Ақырсыз периодты емес ондық бөлшектен тұратын, рационал емес сандарды *иррационал сандар* деп атаймыз.

Мысалы: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $5 - \sqrt{2}$, π , т.б.

Рационал және иррационал сандар жиыны бірігіп *нақты сандар* жиынын құрайды. Нақты сандар жиынын R әрпімен белгілейміз, және оларды сандар өсінің нүктелері арқылы өрнектеуге болады. $\forall x \in R$ нақты санға сандар өсінен бір нүкте сәйкес келеді немесе керісінше, сандар өсіндегі кез келген бір нүктеге нақты сандар жиынынан бір нақты саны сәйкес келеді. $+\infty$ және $-\infty$ символдарды ақырсыз сандар деп атаймыз да, келесі шарттар орындалады деп ұйғарамыз:

1. $\forall x \in R$, онда $-\infty < x < +\infty$, $x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$, $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$,

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$.

2. $\forall x > 0$, онда $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$, $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.

3. $\forall x < 0$, онда $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

4. $(+\infty) + (-\infty)$ және $\frac{\infty}{\infty}$ - анықталмағандықтар деп аталады.

2. Нақты сандардың қасиеттері. Кез келген a және b нақты сандарының қосындысы және көбейтіндісі деп бір жолмен анықталатын $a + b$ және $a \cdot b$ нақты сандарын айтады.

Кез келген a , b және c нақты сандары үшін келесі қасиеттер орындалады:

1. $a + b = b + a$ (орын ауыстыру заңы)

2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (терімділік заңы)

3. $a \cdot b = b \cdot a$ (орын ауыстыру заңы)

4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (терімділік заңы)

5. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (үлестірімділік заңы)

6. Әрбір нақты a саны үшін $a + 0 = a$ теңдігі орындалатындай бір ғана 0 (нөл) нақты саны бар.

7. Әрбір нақты a саны үшін $a + (-a) = 0$ теңдігі орындалатындай бір ғана $(-a)$ нақты саны бар. $-a$ саны a санына қарама-қарсы сан деп аталады.

8. Әрбір нақты a саны үшін $a \cdot 1 = a$ теңдігі орындалатындай бір ғана 1 нақты саны бар.

9. Әрбір $a \neq 0$ нақты саны үшін $a \cdot a^{-1} = 1$ теңдігі орындалатындай бір ғана a^{-1} саны бар. a^{-1} саны a санына *кері сан* деп аталады және ол $\frac{1}{a}$ символымен белгіленеді.

10. $\forall a, b \in R$ үшін мына үш қатынастың біреуі орындалады: $a > b$ немесе $a < b$ немесе $a = b$. (a саны b санынан үлкен), (a саны b санынан кіші), (a саны b санына тең).

11. R жиыны тығыз жиын, яғни кез келген әртүрлі a және b сандардың арасында ақырсыз нақты сандар жиыны жатыр. Ол сандар мына теңсіздікті қанағаттандырады $a < x < b$. Сонымен, егер $a < b$ болса, онда сол сандардың бірі $\frac{a+b}{2}$ ($a < b \Rightarrow 2a < a+b$ және $a+b < 2b \Rightarrow 2a < a+b < 2b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$).

12. R жиыны үзіліссіз. R жиыны A және B бос емес класқа бөлінісін. Әрбір нақты сан тек осы екі жиынның біреуінде ғана жатсын және әрбір екі сан үшін $a \in A$ және $b \in B$ $a < b$ теңсіздігі орындалсын.

Онда тек қана бір c саны табылып, $a \leq c \leq b$ теңсіздігін қанағаттандырады (үзіліссіздіктің қасиеті). Бұл сан A жиынын B жиынынан ажыратады. c саны A жиынның ең үлкен саны (онда B -да ең кіші сан жоқ), немесе ол B жиынның ең кіші саны (онда A жиынның ең үлкен саны жоқ).

ЕСКЕРТУ. Рационал сандар үшін бұл қасиет орындалмайды.

3. Нақты сандардың абсолют шамасы. Нақты x санының абсолют немесе модулі деп мына теңдікті қанағаттандыратын теріс емес нақты санды айтады:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{егер } x \geq 0; \\ -x, & \text{егер } x < 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Мысалы: $|2| = 2$; $|-2| = 2$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$.

Осы анықтамадан, $\forall x$ үшін мына қатнастың дұрыстығы шығады:

$$x \leq |x|, \text{ яғни } \forall x \in R: |x| \geq x. \quad (4.2)$$

$|x| < \varepsilon$ теңсіздігі мына екі теңсіздікке эквивалентті:

$$-\varepsilon < x < \varepsilon. \quad (4.3)$$

Осыдан $|x - y| < \varepsilon$ теңсіздігі мына теңсіздікке эквивалентті

$$-\varepsilon < x - y < \varepsilon, \quad y - \varepsilon < x < y + \varepsilon. \quad (4.4)$$

Абсолюттік шаманың кейбір қасиеттері

1. Екі нақты санның қосындысының абсолют шамасы осы сандардың абсолют шамаларының қосындысынан үлкен емес, яғни

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (4.5)$$

Дәлелдеуі: (4.2) теңсіздіктен $-|x| \leq x \leq |x|$, $-|y| \leq y \leq |y|$.

Бұларды мүшелеп қоссақ $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$. - (4.5) формула дәлелденді.

2. Екі санның айырымының абсолют шамасы осы сандардың абсолют шамаларының айырымының абсолют шамасынан кіші емес, яғни

$$|x - y| \geq ||x| - |y|| \quad (4.6)$$

Дәлелдеуі: $\forall x, y \in R$ үшін $x = y + (x - y)$. Онда (4.5) бойынша

$$|x| \leq |y| + |x - y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|. \quad (4.7)$$

Тура осылай $y = (y - x) + x$. Онда (4.5) бойынша

$$|y| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x| \Rightarrow (|x| - |y|) \geq -|x - y| \quad (4.8)$$

(4.7) мен (4.8) біріктіріп мына теңсіздіктерді аламыз $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|$ (4.6) формула дәлелденді.

3. $\forall x, y \in R$ сандары үшін $|xy| = |x| \cdot |y|$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, ($y \neq 0$)

§5. Сан аралықтары. Шенелген жиындар.

Сандар жиыны математикалық анализде кеңінен қолданылады.

$a < b$ теңсіздігін қанағаттандыратын a және b сандары берілсін.

- 1) $a \leq x \leq b$ теңсіздігін қанағаттандыратын x сандар жиыны кесінді немесе сегмент деп аталады да $[a, b]$ деп белгіленеді. Сонымен $[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$ - кесінді (немесе сегмент).
- 2) $a < x < b$ теңсіздігін қанағаттандыратын x сандар жиыны интервал немесе ашық аралық деп аталады да (a, b) деп белгіленеді немесе $]a, b[$. Сонымен $(a, b) = \{x: a < x < b\}$ - интервал.
- 3) $a \leq x < b$ және $a < x \leq b$ теңсіздігін қанағаттандыратын x сандар жиынын жартылай ашық интервал немесе жартылай ашық кесінді деп аталады да, $[a, b)$ және $(a, b]$ немесе $]a, b]$ және $[a, b]$ деп белгіленеді.
- 4) Келесі сандар жиыны ақырсыз интервал және жартылай ақырсыз сегменттер немесе интервалдар деп аталады:
а) $(-\infty, +\infty)$, б) $(-\infty, a]$, в) $(-\infty, a)$, г) $(a, +\infty)$, д) $[a, +\infty)$.

Бұлардың біріншісі барлық нақты сандар жиыны, яғни $R = (-\infty, +\infty)$ ал қалғандары б) $x \leq a$ в) $x < a$ г) $x > a$ д) $x \geq a$.

Егерде a және b сандары шенелген сандар болса, онда $b - a$ саны кесіндінің $[a, b]$ немесе интервалдың (a, b) немесе жартылай интервалдардың $[a, b)$, $(a, b]$ ұзындығы деп аталады.

x_0 нүкте ішінде жататын $a < x_0 < b$ кез келген (a, b) интервалын " x_0 нүктенің маңайы" деп аталады. Мысалы, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалы ($\delta > 0$) " x_0 нүктенің δ - маңайы" x_0 нүктенің маңайын кейде былай белгілейміз

$$U(x_0) \Rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Leftrightarrow \{x \in R \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

Егер x_0 нүктенің δ маңайына, нүктенің өзі кірмейтін болса, онда ол x_0 нүктенің ойылған δ маңайы деп аталады да $\overset{\circ}{U}(x_0)$ символымен белгіленеді.

Бізге $X = \{x\}$ сандар жиыны берілсін $X \subset R$.

Анықтама 1. Егер $\forall x \in X$ үшін $x \leq M$ ($x \geq m$) теңсіздігі орындалатын $M(m)$ нақты саны табылса, онда X жиыны жоғарыдан (төменнен) шенелген деп, ал M немесе m сандары X жиынның жоғары немесе төменгі шекаралары деп аталады.

Кванторлар арқылы X жиынның жоғарыдан шенелген былай жазылады:

$$(\exists M \in R) (\forall x \in X): x \leq M$$

Енді осыған қарама-қарсы тұжырымы құру ережесін қолдансақ

$$(\forall M \in R) (\exists x \in X): x > M$$

X жиыны жоғарыдан шенелмеген деген тұжырым шығады.

X жиыны төменнен шенелген $\Leftrightarrow (\exists m \in R) (\forall x \in X): x \geq m$

X жиыны төменнен шенелмеген $\Leftrightarrow (\forall m \in R) (\exists x \in X): x < m$.

Анықтама 2. Егер X жиыны жоғарыдан да, төменнен де шенелген болса, онда X -ті шенелген жиын деп атайды.

Кванторлар арқылы бұл анықтаманы былай жазуға болады:

$X \subset R$ жиыны шенелген $\Leftrightarrow (\exists M, m) (\forall x \in X): m \leq x \leq M$,

$X \subset R$ жиыны шенелген $\Leftrightarrow (\exists M > 0) (\forall x \in X): |x| \leq M$,

$X \subset R$ жиыны шенелмеген $\Leftrightarrow (\forall M > 0) (\exists x \in X): |x| > M$.

§6. Супремум мен инфимум

Егер b саны X жиынын жоғарыдан шектесе, онда кез келген b санынан үлкен сандарда осы жиынның жоғарғы шекарасы болады.

Анықтама 3. X жиынының ең кіші жоғарғы шекарасы **супремум** деп аталады да, $\sup X$ таңбалығымен белгіленеді.

(*Supremum* (латын тілінде) - ең үлкені деген сөз).

Сонымен M саны X жиынының супремумы болу үшін келесі екі шарт орындалуы қажет:

$$1. \forall x \in X, x \leq M.$$

$$2. M \text{ саны } X \text{ жиынының жоғарғы шекараларының ең кішісі яғни}$$

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in X): M - \varepsilon < x \leq M.$$

Әрине, X жиынның ең үлкен элементі бар болса, онда ол X -тің супремумы болады.

Егер a саны X жиынын төменнен шектесе, онда кез келген a санынан кіші сандар да осы жиынның төменгі шекарасы болады.

Анықтама 4. X жиынының ең үлкен төменгі шекарасы **инфимум** деп аталады да, $\inf X$ символымен белгіленеді.

(*Infimum* (латын тілінде) - ең төменгі деген сөз).

Сонымен, m саны X жиынының инфимумы болу үшін келесі екі шарттың орындалуы қажет:

$$1. \forall x \in X, x \geq m.$$

$$2. (\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in X): m \leq x < m + \varepsilon.$$

Әрине, X жиынының ең кіші элементі бар болса, онда ол X -тің инфимумы болады.

Жоғарғы (төменгі) шекара туралы аксиома. Әрбір жоғарыдан (төменнен) шенелген жиынның супремумы (инфимумы) бар болады. Жоғарыдан шенелмеген жиынның супремумы $+\infty$, ал $-\infty$ төменнен шенелмеген жиынның инфимумы.

Мысалдар: 1. $X = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$

$\min X = \frac{1}{2} = \inf X$, $\sup X = 1$ бірақ $\max X$ жоқ.

2. $Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$, $\sup Z = +\infty$, $\inf Z = -\infty$.

3. $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\sup N = +\infty$, $\inf N = \min N = 1$.

4. $X = (a, b)$ интервалдың $\sup X = b$, $\inf X = a$, $\max X$ және $\min X$ жоқ.

5. $X = [a, b]$ кесіндінің $\sup X = \max X = b$, $\inf X = \min X = a$.

6. $X = (a, b]$ жартылай интервалдың $\inf X = a$, $\sup X = \max X = b$, $\min X$ жоқ.

§7. Шектер теориясы

1. Тізбектің шегі туралы ұғым.

Анықтама. Егер әрбір натурал санға $n = 1, 2, \dots$ қандайда бір заңдылықпен x_n нақты саны сәйкес қойылса, онда $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ сандар тізбегі анықталған дейді де былай белгіленеді

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}, \quad (7.1)$$

мұндағы әрбір x_n саны (7.1) тізбектің элементі немесе мүшесі деп аталады.

Тізбекке мысалдар:

$$1. \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}.$$

$$2. \left\{ \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots \right\} = \left\{ \frac{1+(-1)^n}{2} \right\}$$

$$3. \{-1, 2, -3, 4, \dots\} = \{(-1)^n n\}$$

$$4. \{2, 5, 10, \dots\} = \{n^2 + 1\}$$

Шектің бірінші анықтамасы. A санын $\{x_n\}$ тізбектің немесе x_n айнымалының шегі деп атайды, егерде әрбір $\varepsilon > 0$ оң санына $n_0 = n_0(\varepsilon)$ натурал саны табылып, мына теңсіздік

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (7.2)$$

барлық $n > n_0$ натурал саны үшін орындалса. Бұл (7.2) теңсіздікті былай да жазуға болады: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ немесе $x_n \rightarrow a$, $n \rightarrow \infty$.

Бұл анықтама қысқаша былай жазылады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > n_0): |x_n - a| < \varepsilon \quad (7.3)$$

Шегі бар тізбек **жинақты**, ал керісінше шегі жоқ тізбек **жинақсыз** деп аталады.

ЕСКЕРТУ. Егер $x_n = a, \forall n \in N$ болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a = a$.

Егерде $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$ болады және керісінше.

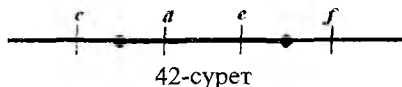
Шектің екінші анықтамасы. a санын $\{x_n\}$ тізбектің шегі дейді, егер осы нүктенің кез келген маңайында тізбектің барлық мүшелері (нүктелері) жатса, тек санаулы мүшелерінен басқа.

Мысалы. $\{(-1)^{n+1}\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$ тізбектің шегі жоқ. a саны осы тізбектің шегі болсын делік, онда анықтама бойынша $\left(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3}\right)$ интервалда тізбектің барлық мүшелері жатуы қажет. Бірақ бұл интервалда тек санаулы ғана мүшелер жатады. Себебі $2 > \frac{2}{3}$.

2. Жинақты тізбектің қасиеттері

1-теорема. Егер $\{x_n\}$ тізбектің (немесе x_n айнымалының) шегі болса, ол тек біреу ғана.

Дәлелдеуі. Кері тұжырым жасайық. Тізбектің екі шегі болсын делік a және b . Осы екі нүктенің әрқайсысын (c, d) және (e, f) интервалдарымен қоршайық (42-сурет). Бұл екі интервал бір-бірімен қиылыспайтындай өте қысқа болсын.



Мысалы, $x_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$ болғандықтан екінші анықтама бойынша (c, d) интервалда тізбектің санаулы мүшелерінен басқа барлық мүшелері жатуға тиіс. Олай болса (e, f) интервалында тізбектің ақырсыз мүшелері болуы мүмкін емес. Олай болса $x_n \rightarrow b, n \rightarrow \infty$ болуы мүмкін емес. Сонымен біз қайшылыққа келдік. Олай болса жинақталған тізбектің тек бір ғана шегі болады.

2-теорема. Егер $\{x_n\}$ тізбегі жинақты болса, онда ол шенелген.

Дәлелдеуі. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ болсын. $\varepsilon = 1$ деп алып, мына төмендегі теңсіздікті қанағаттрататын $n_0 = n_0(1)$ санын табайық:

$$1 > |x_n - a|, \quad \forall n > n_0.$$

$$1 > |x_n - a| \geq |x_n| - |a| \Rightarrow |x_n| < 1 + |a|, \quad \forall n > n_0.$$

$1 + |a|, x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$ сандардың ең үлкенін M деп белгілейік. Онда

$$|x_n| \leq M, \quad \forall n \in N.$$

теорема дәлелденді.

ЕСКЕРТУ. Тізбектің шенелуі тізбектің жинақты болуының қажетті шарты, бірақ ол жеткілікті емес.

Мысал. $\{+1, -1, +1, -1, \dots\}$ Бұл тізбек шенелген, бірақ жинақты емес.

3-теорема. Егер $\{x_n\}$ тізбектің (немесе x_n айнымалының) шегі $a \neq 0$ болса, онда n_0 натурал саны табылып, мына теңсіздік орындалады

$$|x_n| > \frac{|a|}{2} \quad (\forall n > n_0) \quad (7.4)$$

Егер $a > 0$ болса, онда

$$x_n > \frac{a}{2} \quad (\forall n > n_0) \quad (7.5)$$

ал егерде $a < 0$ болса, онда

$$x_n < \frac{a}{2} \quad (\forall n > n_0) \quad (7.6)$$

Сонымен белгілі бір нөмірден бастап тізбектің x_n мүшелері a санының таңбасын сақтайды.

Дәлелдеуі. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ болсын, онда $\varepsilon > \frac{|a|}{2}$ үшін, $\exists n_0$ мына теңсіздікті қанағаттандыратын

$$\left| \frac{|a|}{2} \right| > |a - x_n| \geq |a| - |x_n| \quad (\forall n > n_0) \Rightarrow \quad (7.7)$$

$|x_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$. Сонымен (7.4) дәлелденді. (7.7) теңсіздіктің сол жағын былай жазуға болады

$$\left| \frac{|a|}{2} \right| > |a - x_n| \Rightarrow a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2} \quad (\forall n > n_0) \quad (7.8)$$

Егер $a > 0$ болса, онда (7.8) теңсіздіктің сол жағынан $x_n > a - \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$,

яғни $x_n > \frac{a}{2} \quad (\forall n > n_0)$. Егер $a < 0$ болса, онда (7.8) теңсіздіктің оң жағынан

$x_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$, яғни $x_n < \frac{a}{2} \quad (\forall n > n_0)$.

Теореманың (7.4), (7.5), (7.6) тұжырымдары дәлелденді.

4-теорема. Егер $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$ және $x_n \leq y_n, \forall n \in N$ болса, онда $a \leq b$.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін кері тұжырым жасайық. $a > b$ болсын делік. $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ деп алып, оған төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандыратын мынандай сәйкес n_1 және n_2 сандары табылады:

$$a - \varepsilon < x_n \quad (\forall n > n_1), \quad y_n < b + \varepsilon \quad (\forall n > n_2).$$

Себебі $x_n \rightarrow a$ және $y_n \rightarrow b$. Егер $n_0 = \max(n_1, n_2)$ болса, онда

$y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < x_n \quad (\forall n > n_0)$ яғни $x_n > y_n$ деген қарама-қайшылыққа келдік. Шарт бойынша $x_n \leq y_n$. Сондықтан $a \leq b$.

Салдар. Егер $\{x_n\}$ тізбектің элементтері $[a, b]$ кесіндінің ішінде жатса ($\forall x_n \in [a, b]$), онда оның шегі де осы кесіндіде жатады.

Дәлелдеуі. Шынында да $a \leq x \leq b$ болғандықтан, егер $\lim x_n = c$ болса, онда 4-теорема бойынша $a \leq c \leq b$.

ЕСКЕРТУ. Егер $x_n \in (a, b), \forall n \in N, \lim x_n = c \in [a, b]$

5-теорема. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектердің шегі бірдей болса, мысалы a болса және $x_n \leq z_n \leq y_n$ ($\forall n \in N$) болса, онда $\{z_n\}$ тізбектің де шегі a болады.

Дәлелдеуі. $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектердің шегі a болғандықтан, кез келген $\varepsilon > 0$ санына n_1 және n_2 табылып мына теңсіздіктер орындалады:
 $a - \varepsilon < x_n$ ($n > n_1$), $y_n < a + \varepsilon$ ($n > n_2$). Осыдан $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ үшін
 $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon, (\forall n > n_0)$. Яғни $|z_n - a| < \varepsilon$ ($\forall n > n_0$). Осыдан $z_n \rightarrow a$, егерде $n \rightarrow \infty$. Теорема дәлелденді.

6-теорема. Егер $x_n \rightarrow a$, онда $|x_n| \rightarrow |a|$.

Дәлелдеуі. Бұл теореманың дәлелдеуі мына теңсіздіктен шығады

$$\|x_n\| - \|a\| \leq |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \|x_n\| - \|a\| < \varepsilon \Rightarrow |x_n| \rightarrow |a|, \text{ егер } n \rightarrow \infty.$$

ЕСКЕРТУ. 4-ші және 5-ші теоремалар теңсіздіктен шекке көшуге болатынды көрсетеді.

3. Жинақты тізбектерге қолданылатын арифметикалық амалдар

6-теорема. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектері жинақты болса, яғни $x_n \rightarrow a$ және $y_n \rightarrow b$ болса, онда

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n = a \pm b \quad (7.9)$$

$$\lim(x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n = ab \quad (7.10)$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b}, \text{ егерде } y_n \neq 0, \forall n \in N \quad (7.11)$$

Дәлелдеуі. (7.9) теңдікті дәлелдейік. $x_n \rightarrow a$ және $y_n \rightarrow b$ болсын. $\varepsilon > 0$ санына төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандыратын n_0 натурал санын табуға болады.

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\forall n > n_0)$$

Онда $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Сонымен (7.9) дәлелденді.

Екінші теңдікті (7.10) дәлелдейік.

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b| \quad (7.12)$$

$y_n \rightarrow b$ болғандықтан, $\{y_n\}$ тізбегі шенелген, олай болса

$$\exists M > 0, |y_n| \leq M \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (7.13)$$

$$|a| \leq M \quad (7.14)$$

$\varepsilon > 0$ санына төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандыратын n_0 натурал санын табуға болады

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (\forall n > n_0) \quad (7.15)$$

(7.12)-(7.15) теңсіздіктерден мынау шығады

$$|x_n y_n - ab| \leq \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(7.10) формула дәлелденді.

Үшінші теңдікті (7.11) дәлелдейік. $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow a$ ($b \neq 0$) болсын.

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| &= \left| \frac{x_n b - a y_n}{b y_n} \right| = \frac{|x_n b - y_n a + a b - a b|}{|b y_n|} = \frac{|(x_n - a)b + a(b - y_n)|}{|b y_n|} \leq \frac{|b| |x_n - a| + |a| |y_n - b|}{|b| |y_n|} = \\ &= \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|a|}{|b|} \cdot \frac{|y_n - b|}{|y_n|}. \quad (\forall n > n_0) \end{aligned} \quad (7.16)$$

3-теореманы қолданып, мына теңсіздікті аламыз

$$|y_n| > \frac{|b|}{2} \quad (\forall n > n_1) \quad (7.17)$$

$\varepsilon > 0$ саны үшін төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандыратын n_2 және n_3 сандары табылады

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon |b|}{4}, \quad (\forall n > n_2) \quad (7.18)$$

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{4 |a|}, \quad (\forall n > n_3) \quad (7.19)$$

(7.16)-(7.19) теңсіздіктерден

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| < \frac{\varepsilon |b|}{4 \cdot \frac{|b|}{2}} + \frac{\varepsilon |b|^2}{4 |a|} \cdot \frac{|a|}{|b| \cdot \frac{|b|}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (\forall n > n_0)$$

мұндағы $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$.

Сонымен (7.11) теңдікті дәлелдедік.

Салдар. Егер $x_n = c = \text{const}$ ($\forall n$) болса, онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c y_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c b.$$

1-мысал. $\{x_n\}$ тізбектің $x_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$, $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1-q}$

дәлелдеу керек.

$\{x_n\}$ тізбектің мүшесі геометриялық прогрессия қосындысы болғандықтан

$$x_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ себебі}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Олай болса шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы $\frac{1}{1-q}$ тең, яғни

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad (7.20)$$

$$2\text{-мысал. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (\forall a > 0) \text{ дәлелдейік.}$$

Шешімі: $a \geq 1$ болсын, онда $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$ дейік $x_n \geq 0$.

Бернулли теңсіздігін $(1+h)^n \geq 1 + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ($h > -1$) пайдаланып,
 $a = (1+x_n)^n \geq 1 + nx_n \Rightarrow x_n \leq \frac{a-1}{n}.$

Олай болса

$$0 \leq x_n \leq \frac{a-1}{n}.$$

5-теореманы пайдаланып

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1}{n} \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Олай болса $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, $a \geq 1$.

Егерде $a < 1$ болса, онда $\frac{1}{a} > 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1. \text{ Сонымен кез келген } a > 0 \text{ үшін } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

$$3\text{-мысал: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \text{ екендігін дәлелдейік.}$$

Шешімі: $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$, $x_n \geq 0$ деп алайық.

Ньютон биномының формуласын пайдаланып мынаны аламыз

$$n = (1+x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2!} x_n^2 + \dots + x_n^n \Rightarrow n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2, \text{ себебі әрбір}$$

$$\text{мүше оң сан. Сонымен } 1 \geq \frac{(n-1)}{2} x_n^2 \Rightarrow x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad 0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

$$\text{Осы теңсіздіктерден шекке көшіп } 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

$$\text{Сонымен } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

4. Ақырсыз кішкене және ақырсыз үлкен шамалар

Анықтама 1. α_n айнымалыны ақырсыз кішкене шама дейміз, егерде оның шегі нөл болса. Бұл анықтаманы басқаша былай да айтуға болады. α_n айнымалыны ақырсыз кішкене шама дейміз, егерде кез келген $\varepsilon > 0$ санына n_0 натурал саны табылып мына теңсіздік орындалса $|\alpha_n| < \varepsilon$ ($\forall n > n_0$). Сонымен $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0): |\alpha_n| < \varepsilon$.

x_n айнымалының шегі a болу үшін $x_n = a + \alpha_n$ болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы α_n ақырсыз кішкене шама.

Анықтама 2. β_n айнымалыны ақырсыз үлкен шама деп аталады, егерде $(\forall M > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0): |\beta_n| > M$.

Онда $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty$, немесе $\beta_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$.

Ақырсыз кішкене және ақырсыз үлкен шамалардың негізгі қасиеттері

1-қасиет. Егер x_n шенелген, ал y_n ақырсыз үлкен шамалар болса, онда $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

2-қасиет. Егер x_n -нің абсолют шамасы төменнен оң санымен шенелген болса, ал y_n нөл емес ақырсыз кішкене шама болса, онда $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$.

3-қасиет. Егер $x_n \rightarrow 0$ ал, $|y_n| \leq M, \forall n \in N$, онда $\lim x_n y_n = 0$.

4-қасиет. Егер $\lim x_n = \lim y_n = 0$ ($y_n \neq 0, \forall n \in N$), онда $\frac{x_n}{y_n}$ өрнек $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ түріндегі анықталмаған өрнек болады, ал $x_n^{y_n}$ өрнек (0^0) түріндегі анықталмаған өрнек болады.

5-қасиет. Егер $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow \infty$, онда $\frac{x_n}{y_n}$ өрнек $\begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix}$ түріндегі анықталмаған өрнек болады, ал $x_n - y_n$ өрнек $(\infty - \infty)$ түріндегі анықталмаған өрнек болады.

6-қасиет. Егер $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow \infty$, онда $x_n y_n$ өрнегі $(0 \cdot \infty)$ түріндегі анықталмаған өрнек, ал $x_n^{y_n}$ өрнек (∞^0) түрін анықталмаған өрнек болады.

7-қасиет. Егер $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow 1$ онда $y_n^{x_n}$ өрнегі (1^∞) түріндегі анықталмаған өрнек болады.

Сонымен $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$ түріндегі жеті анықталмаған өрнектерді алдық.

5. Бірсарынды тізбектер

$\{x_n\}$ тізбегін кемімейтін тізбек деп атайды, егер $x_n \leq x_{n+1}$, $(\forall n \in N)$, болса, өспейтін тізбек дейді, егер $x_n \geq x_{n+1}$, $(\forall n \in N)$, болса.

Егер $x_n < x_{n+1}$ $(\forall n \in N)$, болса, онда тізбекті *өспелі* дейді, ал $x_n > x_{n+1}$ $(\forall n \in N)$, болса, онда оны *кемімелі* тізбек дейді. Бұл тізбектердің әрқайсысы бірсарынды деп аталады.

Мысалдар: 1. $\left\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ өспейтін тізбек.

2. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ кемімелі тізбек.

3. $\{0, 1, 0, 1, \dots\}$ шенелген бірсарынды емес тізбек.

4. $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ шенелмеген өспелі тізбек.

Теорема. (Бірсарынды тізбектің жинақтылығының критеріі).

$\{x_n\}$ бірсарынды тізбек жинақты болу үшін, оның шенелген болуы қажетті және жеткілікті. Сонымен бірге $\{x_n\}$ шенелген бірсарынды өспелі (кемімелі) тізбек болса

$$\lim x_n = \sup\{x_n\} \quad (\lim x_n = \inf\{x_n\}).$$

Қажеттілігі. Тізбектің 2-ші қасиеті бойынша барлық жинақталған тізбек шенелген, олай болса берілген тізбекте шенелген.

Жеткіліктілігі. $\{x_n\}$ тізбегі бірсарынды өспелі шенелген және $A = \sup\{x_n\}$ болсын. Супремумың анықтамасы бойынша $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_{n_0}): A - \varepsilon < x_{n_0} \leq A$ болады. Тізбек бірсарынды өспелі болғандықтан $A - \varepsilon < x_{n_0} < x_{n_0+1} < x_{n_0+2} < \dots \leq A$ орындалады.

Бұдан $\forall n \geq n_0$ үшін $|x_n - A| < \varepsilon$ болады. Бұл деген тізбектің шегі бар және ол супремумге тең дегенмен эквивалентті, яғни

$$\lim x_n = A = \sup\{x_n\}.$$

Осымен теорема дәлелденді.

Әрбір жинақты тізбек шенелген, бірақ кері тұжырым дұрыс емес. Шенелген тізбек жинақсыз болуы мүмкін.

Мысалы. $\{x_n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ шенелген тізбек бірақ жинақталмаған.

Больцано-Вейерштрасс теоремасы. Кез келген шенелген тізбектен жинақты тізбекше бөліп алуға болады, ал кез келген шенелмеген тізбектен шектері $+\infty$ немесе $-\infty$ тең тізбекшелер бөліп алуға болады. (Дәлелдемейміз).

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots \right\} \quad (7.21)$$

тізбегін қарастырайық.

Осы тізбектің өспелі және жоғарыдан шенелгендігін көрсетейік. Ньютон биномының формуласын пайдаланып

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned} \quad (7.22)$$

Осыдан $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 = 2$, себебі алып тастаған қалған мүшелер оң сандар.

$$\begin{aligned} x_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

себебі $n! \geq 2^{n-1}$ және шексіз көп мүшелер қостық. Сонымен $2 \leq x_n \leq 3$.

Енді $\{x_n\}$ тізбектің өспелі екендігін көрсетейік. (7.22) формула бойынша

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned} \quad (7.23)$$

(7.22) және (7.23) формулаларды салыстырып $x_n < x_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) екендігін көреміз.

Себебі (7.23)-ғы әрбір қосылғыш (7.22) формуладағы сәйкес әрбір қосылғыштан үлкен және (7.23) формуланың оң бір қосылғышы артық. Бірсарынды тізбектің жинақтылығының критериінен (7.21) тізбектің шегі бар, ол *e* санына тең, яғни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828\dots$$

Е С К Е Р Т У. *e* саны логарифмнің негізі болса, онда ол логарифмді натурал логарифмді деп атайды да былай белгілейді

$$\log_e x = \ln x.$$

7. Тізбектердің жоғарғы және төменгі шектері

Анықтама 1. *M* санын $\{x_n\}$ тізбектің (немесе x_n айнымалының) жоғарғы шегі дейміз, егерде мына екі шарт орындалса:

1) $\{x_n\}$ тізбектің шегі *M* болатын $\{x_{n_k}\}$ жинақты тізбекшесі бар болсын, яғни

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = M.$$

2) $\{x_n\}$ тізбектің әрбір $\{x_{n_i}\}$ жинақты тізбекшелерінің шегі M -нен артпасын, яғни

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} \leq M \quad (\forall \{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}): \quad \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} \leq M.$$

$\{x_n\}$ тізбектің жоғарғы шектерін мына символдармен белгілейміз:

$$M = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Егер тізбек жоғарыдан шенелмеген болса, онда $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Мысалдар 1. $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots\}$ $\overline{\lim} x_n = 3$.

2. $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ $\overline{\lim} x_n = 1$.

Анықтама 2. m санын тізбектің төменгі шегі дейміз, егер де мына екі шарт орындалса:

1) $\{x_n\}$ тізбектің шегі m болатын $\{x_{n_k}\}$ жинақталған тізбекшесі бар болсын, яғни $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = m$.

2) $\{x_n\}$ тізбектің әрбір $\{x_{n_i}\}$ жинақты тізбекшелердің шегі m -нен кем болмасын, яғни $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} \geq m$.

$\{x_n\}$ тізбектің төменгі шегін мына символдармен белгілейміз

$$m = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Мысалдар 1. $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots\}$ $\underline{\lim} x_n = 1$.

2. $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ тізбектің $\underline{\lim} x_n = -1$.

$$\text{әрқашанда } \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n \quad (7.24)$$

Теорема: $\{x_n\}$ тізбектің шегінің бар болуы үшін, $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$ болуы қажетті және жеткілікті онда $\lim x_n = \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$.
(Дәлелдемейміз).

ЕСКЕРТУ. Егерде $\overline{\lim} x_n = -\infty$ болса, онда (7.24) бойынша $\underline{\lim} x_n = -\infty$ және жоғардағы теорема бойынша $\lim x_n = -\infty$.

Егерде $\underline{\lim} x_n = +\infty$ болса, онда $\overline{\lim} x_n = +\infty$ және $\lim x_n = +\infty$.

8. Тізбектің жинақтылығының Коши критерийі

$\{x_n\}$ тізбек жинақты болуы үшін оның Коши шартын қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті, яғни $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ мынандай

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \quad \forall m, n > n_0. \quad (7.25)$$

(7.25) теңсіздікті Коши шарты деп атайды.

Қажеттілігі. $\{x_n\}$ тізбегі жинақты болсын. Онда (7.25) теңсіздіктің орындалатындығын дәлелдейік. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ болғандықтан

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > n_0): |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.26)$$

$n > n_0$ сандарымен қатар бұл теңсіздік $m > n_0$ үшін де орындалады, яғни

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall m > n_0): |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.27)$$

Онда (7.26) және (7.27) теңсіздіктері пайдаланып

$$|x_m - x_n| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

яғни $|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall m, n > n_0$.

Жеткіліктілігі. Егер $\{x_n\}$ тізбегі Коши шартын қанағаттандырса, онда оның шегінің бар екендігін дәлелдеу керек. Шынында да $\varepsilon = 1$ деп алып Коши шартын қанағаттандыратын $n_0 = n_0(1)$ санын таңдап аламыз, яғни

$$|x_n - x_m| < 1, \quad \forall m, n > n_0 \Rightarrow 1 > |x_n - x_m| \geq |x_n| - |x_m|$$

$$\text{немесе } 1 + |x_m| \geq |x_n|, \quad \forall m, n > n_0. \quad (7.28)$$

$m > n_0$ нөмірді айқындап алып және $M = \max \{1 + |x_m|, |x_1|, \dots, |x_{n_0}|\}$ белгілейік.

Онда (7.28) теңсіздік бойынша

$$|x_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Бұл теңсіздік тізбегінің шенелгендігін көрсетеді.

Больцано-Вейерштрасс теоремасы бойынша шенелген $\{x_n\}$ тізбегінен шегі a санына тең $\{x_{n_k}\}$ тізбекше бөліп алуға болады, яғни

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \quad (7.29)$$

Бұл жағдайда, тек бұл тізбекшенің емес негізгі $\{x_n\}$ тізбектің де шегі a болатындығын көрсетейік, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Коши шарты бойынша

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0): |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.30)$$

(7.29) теңдіктен $\exists n_0, \forall n_k > n_0$ болғанда

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.31)$$

Сонымен $|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n > n_0$.

Бұл теңсіздікте (7.30) және (7.31) теңсіздіктерді пайдаландық және $m = n_k$ деп алдық, яғни

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \forall n > n_0$$

Сонымен жеткіліктілігі де дәлелденді.

§8. Бір айнымалы функциялар

1. Функция ұғымы. x элементтерінен тұратын X жиыны және y элементтерінен тұратын Y жиыны берілсін. X жиынның әрбір элементіне Y жиының бір немесе бірнеше элементін сәйкес қоятын ереже функция деп аталады да $y = f(x)$ түрінде жазылады. x функцияның аргументі немесе тәуелсіз айнымалы деп, ал y — тәуелді айнымалы деп аталады. X жиыны функцияның анықталу облысы, ал Y жиыны функцияның мәндерінің жиыны деп аталады.

Функциялар әртүрлі тәсілдер арқылы берілуі мүмкін, енді сол берілу тәсілдерін қарастырайық.

I. Функцияның аналитикалық тәсілмен берілуі. Бұл жағдайда функция формула арқылы беріледі.

Оған мысалдар:

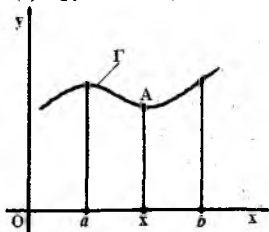
$$1) y = \sqrt{1-x^2}, \quad 2) y = \lg(1+x), \quad 3) y = x^2 - 4x + 5, \quad 4) y = \frac{x^2}{x-1}, \quad 5) y = \arcsin x.$$

x -тің нақты мәніне y -тің нақты мәні сәйкес келетін функциялар қарастырылады. Жоғарыдағы функциялардың анықталу облысы мынандай:

- 1) $[-1, 1] \Leftrightarrow \{-1 \leq x \leq 1\}$ кесінді
- 2) $x > -1 \Leftrightarrow x \in (-1; +\infty)$
- 3) Барлық нақты сандар жиыны, яғни $x \in R$.
- 4) $x = 1$ нүктесінен басқа, барлық нақты сандар жиыны.
- 5) $[-1, 1]$ кесінді.

II. Функцияның графиктік тәсілмен берілуі. $y = f(x)$ функция $[a, b]$

кесіндіде график түрде берілсе, онда $[a, b]$ кесіндідегі кез келген x нүктеге функцияның сәйкес мәні берілуі қажет (43-сурет). Сонымен $y = f(x)$ функцияның графигі деп $\Gamma = \{(x, y) \in R_2 \mid x \in [a, b], y = f(x)\}$ жиынын айтады. Мұндағы R^2 жазықтықтағы барлық нүктелер жиыны. Функцияны графиктік тәсілмен беру физикалық өлшемдерде жиі қолданылады. Көпшілік жағдайда өздігінен жазатын аспаптар графикті автоматты түрде сызады. Функцияның графигін тұрғызған кезде келесі қарапайым ережелері жиі қолданылады. Егер Γ $y = f(x)$ функцияның графигі болса, онда:



43-сурет

1) $y = af(x)$ $a > 0$, $a \neq 1$, функцияның графигін тұрғызу үшін Γ -ны y осінің бойымен a есе созу керек ($a > 1$) немесе $\frac{1}{a}$ есе сығу керек ($a < 1$);

2) $y = f(x) + a$ болса, онда Γ -ы OY өсінің бойымен a шамаға жылжыту керек;

3) $y = f(x - a)$ болса, онда Γ -ы OX өсінің бойымен a шамаға жылжыту керек;

4) $y = f(ax)$ болса, $a > 0$, $a \neq 1$, онда Γ -ы OX өсінің бойымен a есе сығу керек

($a > 1$) немесе $\frac{1}{a}$ есе созу керек ($a < 1$)

III. Функцияның кесте арқылы берілуі. Функция кестелік тәсілмен берілсе кестенің бірінші жолына аргумент, ал екінші жолына оған сәйкес функцияның мәндері жазылады.

Мысал. Егер ауаның температурасын әрбір сағат сайын өлшесек. Онда уақыттың $t = 0, 1, 2, \dots, 24$ мәндеріне температураның $T = T_0, T_1, \dots, T_{24}$ мәндері сәйкес келеді, яғни мынандай кестені жазуға болады

t	0	1	2	...	24
T	T_0	T_1	T_2	...	T_{24}

Сонымен $T = f(t)$ функциясын алдық, бұл функция t -ың бүтін мәндерінде анықталған.

IV. Функцияның айқындалмаған тәсілмен берілуі. x және y айнымалылары бір-бірімен мына теңдеумен байланысты болсын

$$F(x, y) = 0. \quad (8.1)$$

(a, b) интервалында анықталған $y = f(x)$ функцияны (8.1)-і теңдеуге қойған кезде ол осы теңдеуді x бойынша тепе-теңдікке айналдырса, онда $y = f(x)$ функциясы (8.1) теңдікпен анықталған айқындалмаған тәсілмен берілген функция деп аталады. *Мысалы:*

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (8.2)$$

теңдеуі айқындалмаған тәсілмен берілген мына екі функцияны анықтайды.

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (8.3)$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (8.4)$$

Шынында да егер (8.3) және (8.4)-ті (8.2)-ге y -тің орнына қойсаң мынандай тепе-теңдік аламыз

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0.$$

Әрине кез келген айқындалмаған функцияны мына түрде $y = f(x)$, яғни айқын түрде шешуге болмайды. *Мысалы* $y^6 - y - x = 0$ теңдеуден y -і қарапайым функциялар арқылы өрнектеуге болмайды.

2. Функциялардың түрлері

1°. Жұп және тақ функциялар. D жиынында анықталған $y = f(x)$ функциясы жұп деп аталады, егерде $\forall x \in D, \forall (-x) \in D$ үшін $f(-x) = f(x)$ болса.

Мысалдар. $y = \cos x, y = x^2 + \sqrt{1 - x^2}$ функциялары жұп.

D жиынында анықталған $y = f(x)$ функциясы тақ деп аталады, егерде $\forall x \in D, \forall (-x) \in D$ үшін $f(-x) = -f(x)$ болса.

Мысалдар. $y = \sin x, y = x\sqrt{1 - x^2}$ функциялары тақ.

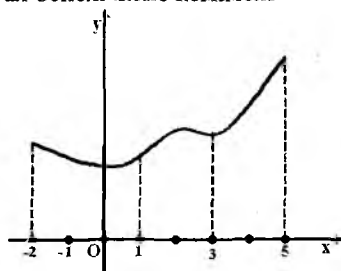
Жұп функцияның графигі y өсіне симметриялы, тақ функцияның графигі бас нүктеге симметриялы болады. Екі жұп немесе екі тақ функциялардың көбейтіндісінен жұп функция шығады, ал жұп функция мен тақ функцияның

көбейтіндісінен тақ функция шығады. Әрине көп функциялар жұп та емес, тақ та емес.

Мысалдар. $y = x + x^2 + 1$, $y = 1 - x^3$, $y = 1 + \sin x$.

Бұл функциялар жұп та емес, тақта емес.

2°. **Бірсарынды функциялар.** $y = f(x)$ функциясы D жиынында анықталсын. Егер $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ үшін мына теңсіздік орындалса $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$) онда f функциясы D жиынында өспелі (кемімейтін) функция деп атайды, ал егер $f(x_1) > f(x_2)$ (немесе $f(x_1) \geq f(x_2)$), болса, онда f функцияны D облысында кемімелі (өспейтін) функция деп атайды. D жиында өспелі, кемімейтін, кемімелі және өспейтін функцияларды D жиынында бірсарынды функциялар деп атайды, ал өспелі және кемімелі функцияларды қатаң бірсарынды функциялар деп атайды. *Мысалы*, график тәсілімен берілген $y = f(x)$ функция (44-сурет) $(-2, 1)$ интервалында кемиді, $(1, 5)$ интервалында кемімейді, $(3, 5)$ интервалында өседі, ал $(-2, 1)$ және $(3, 5)$ аралықтарында функция қатаң бірсарынды.



44-сурет

3°. **Шенелген функциялар.** D жиында анықталған $y = f(x)$ функциясын осы облыста шенелген дейміз, егер $(\exists M > 0) (\forall x \in D): |f(x)| \leq M$ болса.

Мысалы, $y = \sin x$ функциясы барлық сандық өсте шенелгені себебі $\forall x \in R$ үшін $|\sin x| \leq 1$.

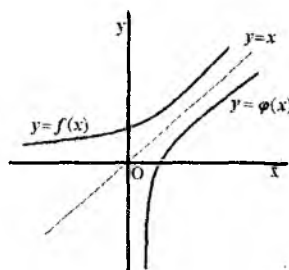
D жиынында $y = f(x)$ нақты мәнді функция анықталсын, онда $f(x)$ функциясының D жиынында қабылданған мәндерінен құрылған нақты сандар жиынының супремумы мен инфимумы сәйкес $f(x)$ функциясының супремумы мен инфимумы деп аталады да, $\sup_D f$, $\sup_{x \in D} f(x)$ және $\inf_D f$, $\inf_{x \in D} f(x)$ символдарымен белгіленеді.

4°. **Периодты функциялар.** D жиынында анықталған $y = f(x)$ функциясын осы жиында периодты деп атайды, егер $T > 0$ саны табылып барлық $x \in D$ үшін $x + T \in D$ болса және $f(x + T) = f(x)$ теңдігі орындалса. Бұл жағдайда T саны функцияның периоды деп аталады. Егер T функцияның периоды болса, онда $m \cdot T$ сандары да функцияның периоды болады, мұндағы $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. *Мысалы*, $y = \sin x$ функцияның периодтары $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots$ сандары болады. Бірақ негізгі периоды $T = 2\pi$ -ге тең. Жалпы жағдайда негізгі периоды ретінде $f(x + T) = f(x)$ теңдікті қанағаттандыратын ең кіші оң T санын алады.

5°. **Кері функция.** D облысында анықталған $y = f(x)$ функциясы берілген және оның қабылдайтын мәндері E жиыны болсын. Егер әрбір $y \in E$ мәніне бір ғана $x \in D$ мәні сәйкес болса, онда $x = \varphi(y)$ функциясы анықталған және

оның анықталу облысы E ал мәндерінің жиыны D болады. $\varphi(y)$ функциясы $f(x)$ функциясының кері функциясы деп аталады да мына түрде жазылады $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Кез келген өспелі немесе кемімелі, яғни қатаң бірсарынды, кері функцияның болатыны айқын. Бірақ, кері функциясы бар функция бірсарынды болмауы да мүмкін.

$y = f(x)$ функциясы және оған кері $x = \varphi(y)$ функциясы бір қисықты бейнелейді, яғни олардың графиктері бірдей болады. Егер кері функцияның аргументі x арқылы, ал тәуелді айнымалыны y деп белгілесек, онда $y = f(x)$ функцияның кері функциясын $y = \varphi(x)$ деп жазуға болады. Онда $y = f(x)$ және $y = \varphi(x)$ өзара кері функциялардың графиктері бірінші ширек арқылы өтетін $y = x$ биссектрисаға симметриялы болады (45-сурет).



45-сурет.

Мысалдар. 1. $y = 2x$ функцияның кері функциясы $x = \frac{y}{2}$ болады.

2. $y = x^2$ функциясының $[0; 1]$ кесіндідегі кері функциясы $x = \sqrt{y}$ болады; $y = x^2$ функциясының $[-1; 1]$ кесіндіде кері функциясы жоқ, себебі y -тің бір мәніне x -тің екі мәні сәйкес келеді.

6°. **Күрделі функция.** $y = f(u)$ функциясы D жиынында, ал $u = \varphi(x)$ функциясы E жиынында анықталсын, сонымен қатар $\forall x \in E$ мәніне $u = \varphi(x) \in D$ мәні сәйкес келсін. Онда E жиынында анықталған $y = f(\varphi(x))$ функциясын x -тің күрделі функциясы (немесе берілген функциялардың суперпозициясы) деп аталады. *Мысалы,* $y = \sin 2x$ функциясы $y = \sin u$ және $u = 2x$ екі функцияның суперпозициясы. Күрделі функцияның бірнеше аралық аргументтері болуы мүмкін. Берілген мысалда $u = 2x$ айнымалы күрделі функцияның аралық аргументі.

3. Элементар функциялар

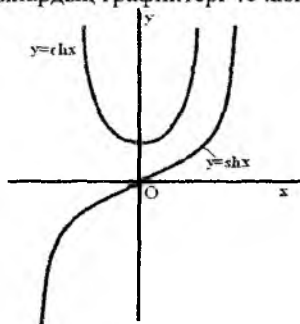
$y = C$, $C = \text{const}$, $y = x^a$ - дәрежелік; $y = a^x$ ($a > 0$) - көрсеткіштік; $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) - логарифмдік; $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ - тригонометриялық; $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ кері тригонометриялық функциялар қарапайым функциялар деп аталады. Бұл функциялардың графиктері орта мектептен белгілі. Осы функцияларға арифметикалық амалдар қолдансақ және аргументтері осы функциялар болатын күрделі функция құрсақ, ондай функциялар *элементарлы функция* деп аталады.

Мысалы, $y = \ln(x + \sin^3 x + a^x)$ элементар функция.

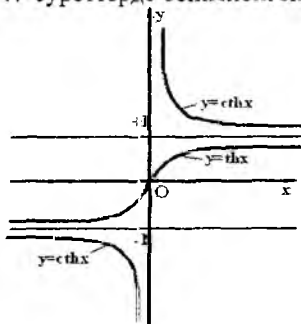
Гиперболалық функциялар. Мына қарапайым функциялар

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Сәйкес гиперболалық синус, косинус, тангенс және котангенс деп аталады. Бұл функциялардың графиктері 46 және 47-суреттерде бейнеленген.



46-сурет



47-сурет

Гиперболалық функциялар үшін мына формулалар дұрыс:

$$\text{sh}(x \pm y) = \text{sh}x \cdot \text{ch}y \pm \text{ch}x \cdot \text{sh}y.$$

$$\text{ch}(x \pm y) = \text{ch}x \cdot \text{ch}y \pm \text{sh}x \cdot \text{sh}y.$$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1, \quad \text{ch}2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x, \quad \text{sh}2x = 2\text{sh}x \text{ch}x.$$

Бұл формулалардың үшіншісін дәлелдейік:

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.$$

Қалған формулаларда осылай дәлелденеді.

$y = \text{sh}x$ және $y = \text{th}x$ функциялар барлық Ox өсінде қатаң бірсарынды болғандықтан, олардың кері функциялары бар. Олар $x = \text{Arsh}y$ гиперболалық аресинус және $x = \text{Arth}y$ гиперболалық аретангенс.

§9. Функцияның шегі

Функцияның нүктедегі шегінің бір-бірімен эквивалентті екі анықтамасын келтірейік.

1-анықтама. (функция шегінің Коши бойынша анықтамасы немесе « ε - δ тілінде»).

Егер f функция x_0 нүктесінің кейбір аймағында анықталса, мүмкін, осы x_0 нүктеден басқа, және кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ саны табылып, $0 < |x - x_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін мына теңсіздік орындалса

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad (9.1)$$

онда A саны f функцияның x_0 нүктесіндегі шегі деп аталады.

Функцияның шегін $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ немесе $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow x_0$) деп белгілейміз.

Бұл анықтаманы қысқаша былай жазуға болады

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (9.2)$$

немесе

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \left(\forall x \in U_\delta(x_0) : |f(x) - A| < \varepsilon \right). \quad (9.3)$$

2- анықтама. (Функция шегінің Гейне бойынша анықтамасы).

Егер f функция x_0 нүктенің кейбір аймағында анықталса, мүмкін, осы x_0 нүктеден басқа, және x_0 нүктесіне жинақталатын кез келген $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$, тізбекке сәйкес функция мәндерінен тұратын $\{f(x_n)\}$ тізбектің шегі A болса $n \rightarrow \infty$, яғни мына теңдік орындалса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A, \quad (9.4)$$

онда A саны f функцияның x_0 нүктесіндегі шегі деп аталады.

Бұл анықтаманы қысқаша былай жазуға болады

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \{x_n\}) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad x_n \neq x_0 \right) : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A. \quad (9.5)$$

Мысал 1. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ функцияның $x \rightarrow 0$ шегі бар ма?

Шешімі. Кез келген екі тізбекті қарастырайық $x'_n = \frac{1}{\pi n}$ және $x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$.

Бұл екі тізбектің шектері нөлге тең, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = 0$, бірақ $x'_n \neq 0$, $x''_n \neq 0$, $\forall n$.

Сонымен $f(x'_n) = \sin \pi n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, $f(x''_n) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = 1$, $n = 1, 2, \dots$,

Сондықтан $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = 1$. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ функцияның $x \rightarrow 0$ шегі жоқ.

Мысал 2. $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ – барма?

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, болатын $\{x_n\}$ тізбегін қарастырайық $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} = \frac{2(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1} = 1.$$

$f(x)$ функцияның $x \rightarrow 0$ шегі бар себебі функцияның мәндерінен құрылған тізбектің шегі $\{x_n\}$ тізбекті қалай алсақта $x \rightarrow 0$ бірге тең.

§10. Біржақты шектер

Функция шегінің анықтамасында $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, аргумент x x_0 -ге кез келген тәсілмен ұмтылады. Сонымен x x_0 -ге сол жақтан немесе оң жақтан немесе x_0 маңынан тербеліп осы нүктеге ұмтылады. Кейбір жағдайда функцияның шегі x -тің x_0 -ге қалай ұмтылған тәсіліне байланысты болады.

Сондықтан бір жақты шек ұғымын кіргіземіз.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып кез

келген $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ үшін мына теңсіздік орындалса

$$|f(x) - A_1| < \varepsilon, \quad (10.1)$$

онда A_1 санын f функцияның x_0 нүктесіндегі сол жақты шегі дейді.

Сол жақты шек былай жазылады

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1 \text{ немесе } f(x_0 - 0) = A_1. \quad (10.2)$$

Тура осылай оң жақ шекте анықталады. A_2 санын f функциясының x_0 нүктесіндегі оң жақты шегі дейді, егер

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon))(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)): |f(x) - A_2| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2. \quad (10.3)$$

Оң жақты шек қысқаша былай жазылады $f(x_0 + 0) = A_2$.

Сол жақты және оң жақты шектер *біржақты шектер* деп аталады. Егер сол жақты $f(x_0 - 0)$ және оң жақты $f(x_0 + 0)$ шектер бар болса және олар бір-бірімен тең болса, онда функцияның x_0 нүктеде шегі бар, яғни $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$ болса, онда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Егер $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, онда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ шегі болмайды.

§11. Шегі бар функциялардың қасиеттері

Функция шегінің Гейне анықтамасы бойынша нүктедегі функция шегін тізбекің шегіне келтіруге болады. Сондықтан шегі бар функциялардың қасиеттерінің дәлелдеуі тізбектің сәйкес қасиеттерін дәлелдеген әдістермен дәлелденеді.

1-қасиет. Егер функцияның x_0 нүктеде шегі бар болса, онда ол жалғыз.

2-қасиет. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $A \neq \infty$ болса, онда x_0 нүктенің қайсібір ойылған аймағында $f(x)$ функциясы шенелген болады, яғни

$$(\exists M > 0) \left(\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \right): |f(x)| \leq M.$$

3-қасиет. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ және A ақырлы сан болса, онда x_0 нүктенің

қайсібір ойылған аймағы табылып $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$, $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ теңсіздігі орындалады.

Егер $A > 0$, онда $f(x) > \frac{A}{2}$, ал егер $A < 0$, онда $f(x) < \frac{A}{2}$.

4-қасиет. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = A_2$ болса және x_0 нүктенің қайсібір $\overset{\circ}{U}(x_0)$ ойылған аймағында $f_1(x) \leq f_2(x)$ болса, онда $A_1 \leq A_2$ болады.

5-қасиет. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = A$ болса және x_0 нүктесінің қайсібір $\overset{\circ}{U}(x_0)$ ойылған аймағында $f_1(x) \leq \phi(x) \leq f_2(x)$ теңсіздіктері орындалса, онда $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = A$ болады.

6-қасиет. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq \infty$ және $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq \infty$ болса, онда $f(x) \pm g(x)$

$f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ функциялардың $x \rightarrow x_0$ -да ақырлы шектері болады, сонымен қатар мына теңдіктер орындалады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = AB.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \quad g(x) \neq 0, \quad x \rightarrow x_0.$$

Теорема. (Функция шегінің бар болуының Коши критеріі)

f функциясының x_0 нүктеде ақырлы шегі болу үшін, кез келген $\varepsilon > 0$ саны-на x_0 нүктесінің $\overset{0}{U}(x_0, \delta)$ ойылған аймағы табылып, кез келген $x', x'' \in \overset{0}{U}(x_0, \delta)$ үшін мына теңсіздіктің

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

орындалуы қажетті және жеткілікті.

§12. Ақырсыз үлкен және ақырсыз кішкене функциялар

Анықтама. $y = f(x)$ функциясын x_0 нүктеде (немесе $x \rightarrow x_0$ ұмтылғанда) *ақырсыз үлкен* дейді, егер

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (12.1)$$

болса.

Бұл анықтаманы қысқаша былай жазуға болады:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \left(\forall x \in \overset{0}{U}(x_0, \delta) : |f(x) - A| > \varepsilon, \right) \quad (12.2)$$

онда $f(x)$ функцияны *ақырсыз үлкен функция* дейді. Дәл осы сияқты, $f(x)$ функциясын ақырсыз үлкен функция дейді, егерде $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ ұмтылғанда функцияның шегі ақырсыз сан болса. Тура осылай бір жақты шектер үшін де яғни $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0 - 0$ ұмтылғанда, функцияның шегі ақырсыз сан болса, онда функцияны ақырсыз үлкен дейді.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясын x_0 нүктеде (немесе $x \rightarrow x_0$ ұмтылғанда) *ақырсыз кішкене* дейді, егер

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad (12.3)$$

болса.

Бұл анықтаманы кванторлар арқылы былай жазуға болады:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \overset{0}{U}(x_0, \delta) : |f(x)| < \varepsilon. \quad (12.4)$$

онда $f(x)$ -ті *ақырсыз кішкене функция* дейді. Тура осылай, $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ ұмтылғанда ақырсыз кішкене функцияның шегі нөлге

ұмтылады ($f(x) \rightarrow 0$).

Ақырсыз үлкен және ақырсыз кішкене функциялардың мынандай қасиеттерін дәлелсіз келтірейік:

1. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ болса, онда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$.

2. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ болса, онда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.

3. Егер $\varphi(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow x_0, \varphi(x) \neq 0$), онда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\varphi(x)} = \infty$, егер $\varphi(x) \rightarrow \infty$

($x \rightarrow x_0, \varphi(x) \neq 0$), онда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\varphi(x)} = 0$.

4. Егер $\varphi(x) \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_0$) ұмтылса, онда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ өрнегі $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ түріндегі анықталмаған өрнек болады, ал $\lim_{x \rightarrow x_0} (\varphi(x) - f(x))$ өрнегі $(\infty - \infty)$ түріндегі анықталмаған өрнек болады.

5. Егер $\varphi(x) \rightarrow 0, f(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow x_0$) ұмтылса, онда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ өрнегі $\left(\frac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмаған өрнек болады.

6. Егер $\varphi(x) \rightarrow 0, f(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow x_0$) ұмтылса, онда $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)f(x)$ өрнегі $(0 \cdot \infty)$ түріндегі анықталмаған өрнек болады. Осы анықталмаған өрнектермен қатар $(1^\infty), (\infty^0), (0^0)$ анықталмаған өрнектер бар.

§13. Үзіліссіз функциялар

Анықтама 1. $f(x)$ функциясы x_0 нүктенің кейбір аймағында $U(x_0)$ анықталсын. Егер

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (13.1)$$

болса, онда $f(x)$ функциясын x_0 нүктеде *үзіліссіз* дейді. Яғни функцияның x_0 нүктедегі шегі оның x_0 нүктедегі мәніне тең.

Функцияның үзіліссіздігін « $\varepsilon - \delta$ » тілінде берейік.

Анықтама 2. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (13.2)$$

теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясын x_0 нүктеде *үзіліссіз* деп аталады.

Бұл анықтаманы қысқаша былай жазуға болады:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x: |x - x_0| < \delta): |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (13.3)$$

немесе

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in U(x_0, \delta)): f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon) < \varepsilon. \quad (13.4)$$

Енді үзіліссіз функцияның үшінші анықтамасын берейік. $\Delta x = x - x_0$ айырымды аргументтің өсімшесі, ал оған сәйкес $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ айырымды функцияның өсімшесі деп атайды.

Анықтама 3. Егер тәуелсіз айнымалының ақырсыз аз өсімшесіне функцияның ақырсыз аз өсімшесі сәйкес келсе, яғни $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta f \rightarrow 0$ ұмтылса, онда $f(x)$ функциясын берілген нүктеде үзіліссіз дейді.

1. Кейбір қарапайым функциялардың үзіліссіздігі.

Мысал 1. $f(x) = C = \text{const}$ функциясы кез келген x нүктеде үзіліссіз.

Дәлелдеуі. $f(x + \Delta x) = C$. $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta f = 0$.

3-анықтама бойынша $f(x)$ үзіліссіз.

Мысал 2. $f(x) = x$ функциясы кез келген x нүктеде үзіліссіз.

Дәлелдеуі. $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$, $\Delta f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$.

Мысал 3. $f(x) = |x|$ функциясы кез келген x нүктеде үзіліссіз.

Дәлелдеуі. $|\Delta f(x)| = ||x + \Delta x| - |x|| \leq |x + \Delta x - x| = |\Delta x|$. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta f| \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0$.

Мысал 4. а) $f(x) = \sin x$ функциясы кез келген x нүктеде үзіліссіз.

Дәлелдеуі. $\Delta f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$. $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 1$,

сондықтан

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} \leq 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \sin \frac{\Delta x}{2} \leq 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left|\sin \frac{\Delta x}{2}\right| \leq \\ &\leq 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left|\frac{\Delta x}{2}\right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0. \end{aligned}$$

б) $f(x) = \cos x$ функциясы да кез келген x нүктеде үзіліссіз. Бұл функцияның үзіліссіздігін дәлелдеу үшін оны синусқа түрлендіреміз, яғни

$$f(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left|u = \frac{\pi}{2} - x\right| = \sin u.$$

2. Нүктедегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері

1-қасиет. Егер f және φ функциялары x_0 нүктеде үзіліссіз болса, онда осы нүктеде $f \pm \varphi$, $f \cdot \varphi$, $\frac{f}{\varphi}$ ($\varphi \neq 0$) функциялары да үзіліссіз.

Бұл қасиеттің дәлелдеуі функцияның үзіліссіздігінің анықтамасынан және тізбектің қасиеттерінен тікелей шығады.

2-қасиет. φ функциясы x_0 нүктеде үзіліссіз, ал f функциясы $y_0 = \varphi(x_0)$ нүктеде үзіліссіз болсын, онда $f(\varphi(x))$ күрделі функция x_0 нүктеде үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі. f функциясы $y_0 = \varphi(x_0)$ нүктеде үзіліссіз болғандықтан

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \sigma > 0)(\forall y: |y - y_0| < \sigma): |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

ал φ функциясы x_0 нүктеде үзіліссіз болғандықтан табылған σ саны үшін

$$(\exists \delta > 0)(\forall x: |x - x_0| < \delta): |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \sigma.$$

Осы теңсіздіктен $|x - x_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын кез келген x үшін

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))| < \varepsilon,$$

теңсіздігі орындалады. Бұл теңсіздік $f(\varphi(x))$ күрделі функцияның x_0 нүктеде үзіліссіз екендігін көрсетеді. Бұл қасиеттен тікелей

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\right).$$

3-қасиет. Егер x_0 нүктеде f функциясы үзіліссіз болса, онда осы нүктенің $U(x_0)$ аймағы табылып, осы аймақта f функциясы шенеулі болады.

Бұл қасиеттің дәлелдеуі тізбектің сәйкес қасиетін дәлелдеуіндей.

4-қасиет. Егер x_0 нүктеде f функция үзіліссіз болса және $f(x_0) \neq 0$, онда осы нүктенің $U(x_0)$ аймағы табылып, осы аймақта

$$|f(x)| > \frac{f(x_0)}{2}$$

болады. Егер $f(x_0) > 0$, болса, онда $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$, $\forall x \in U(x_0)$. Егер $f(x_0) < 0$

болса, онда $f(x) < \frac{f(x_0)}{2}$, $\forall x \in U(x_0)$.

Бұл қасиеттің дәлелдеуі де тізбектің сәйкес қасиетін дәлелдеуіндей.

§14. Функцияның бірінші және екінші текті үзіліс нүктелері

$y = f(x)$ функцияның анықталу облысы D болсын. Бұл функция x_0 нүктеде үзіліссіз болу үшін мына үш шарт орындалу керек:

- 1) $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктеде анықталған, яғни $x_0 \in D$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ бар.
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Егер x_0 нүктеде осы шарттардың кемінде біреуі орындалмаса, онда x_0 нүктесі функцияның үзіліс нүктесі деп аталады.

1. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ бар болса, бірақ функция x_0 нүктеде анықталмаса немесе

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ шарты орындалмаса, онда x_0 функцияның *жөнделетін үзіліс нүктесі* деп аталады.

2. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ жоқ, бірақ функцияның екі жақты шектері бар болса, яғни

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0), \quad f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$$

онда x_0 функциясының бірінші текті үзіліс нүктесі деп аталады. А $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ айырымды f функцияның x_0 нүктесіндегі секіrmесі дейді.

3. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ және $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ шектердің кемінде біреуі болмаса немесе шектері ақырсыз болса (шектері $+\infty$ немесе $-\infty$ ұмтылса) онда x_0 функцияның екінші текті үзіліс нүктесі деп аталады.

$$\text{Мысал 1. } f(x) = \text{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = -1. \quad (48\text{-сурет})$$

$f(0+0) \neq f(0-0)$. Сондықтан $x_0 = 0$ нүктесі функцияның бірінші текті үзіліс нүктесі.

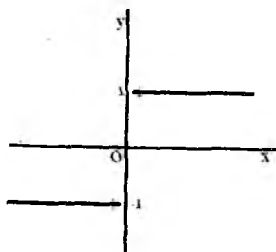
$$\text{Мысал 2. } f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{Бұл функцияның } x \rightarrow 0 \text{ шегі жоқ}$$

Сондықтан $x_0 = 0$ нүктесі функцияның екінші текті үзіліс нүктесі.

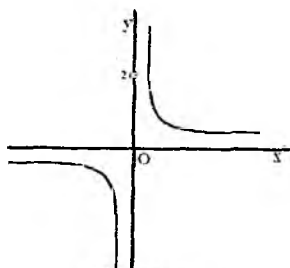
$$\text{Мысал 3. } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty. \quad (49\text{-сурет}).$$

Сондықтан $x_0 = 0$ нүктесі функцияның екінші текті үзіліс нүктесі.



48-сурет



49-сурет

$$\text{Мысал 4. } f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ болатындығын келесі параграфта дәлелдейміз. Бірақ бұл функция $x_0 = 0$ нүктеде анықталмаған, сондықтан $x_0 = 0$ нүктесі функцияның жөнделетін үзіліс нүктесі. Егер $f(0) = 1$ тең деп алсақ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ функциясы нүктеде $x_0 = 0$ үзіліссіз болады.

§15. Тамаша шектер

1. Бірінші тамаша шек.

Шектерді есептегенде бірінші тамаша шек деп аталатын

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (15.1)$$

шегі жиі қолданылады. Осы теңдікті дәлелдейік. Центрі бас нүктеде радиусы бірге тең шеңберді қарастырайық (50-сурет).

$OA = 1$, $OA \perp AD$, $AB \perp BD$. AD түзуі A нүктенен шеңберге жүргізілген жанама. Осы суреттен

$$AB < AC < AD \quad (15.2)$$

екендігі айқын.

$$\frac{AB}{OA} = \sin x \Rightarrow AB = OA \cdot \sin x = \sin x,$$

$$AC = OA \cdot x = x, \quad \frac{AD}{OA} = \operatorname{tg} x \Rightarrow AD = OA \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x.$$

Бұл теңдіктерді (15.2) теңсіздіктерге қойып, мына теңсіздіктерді аламыз

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad (15.3)$$

$\sin x > 0$ болғандықтан, (15.3) теңсіздіктерді $\sin x$ бөлсек

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{немесе} \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \quad (15.4)$$

теңсіздіктерін аламыз. $\frac{\sin x}{x}$, $\cos x$ функциялары жұп болғандықтан, (15.4)

теңсіздіктер $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ үшін де дұрыс. $\cos x$ функциясы үзіліссіз болғандықтан

$$\begin{aligned} 1 &> \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \Rightarrow \\ &1 > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > 1. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Шектің 5-ші қасиеті бойынша (15.5) теңсіздіктерден

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

теңдігі шығады.

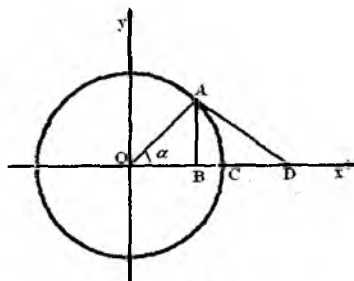
2. Екінші тамаша шек.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (15.6)$$

Екінші тамаша шек деп аталатын (15.6) теңдікті дәлелдейік. Функция шегінің 2-ші анықтамасы бойынша (15.6) шекті, тізбектің шегі деп қарастыруға болады, яғни

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \rightarrow e, \quad x_n \rightarrow \infty \quad (15.7)$$

екендігін дәлелдесек жеткілікті.



50-сурет

x_n кез келген, $+\infty$ ұмтылатын, айнымалы болсын. x_n -нің $[x_n] = k_n$ деп бүтін бөлігін белгілейік. Онда $k_n \leq x_n \leq k_n + 1$ теңсіздіктері орындалады. Сонымен қатар

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1}$$

теңсіздіктері орындалады. Егер $x_n \rightarrow +\infty$ онда $k_n \rightarrow +\infty$ ұмтылады.

$$\lim_{k_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} \leq \lim_{x_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \lim_{k_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1}$$

теңсіздіктердің сол және оң жағындағы өрнектерді былай жазуға болады.

$$\lim_{k_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1} = \lim_{k_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1} \cdot \lim_{k_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e.$$

$$\lim_{k_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} = \lim_{k_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \lim_{k_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e.$$

Олай болса

$$e \leq \lim_{x_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq e \Rightarrow \lim_{x_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Енді $x_n \rightarrow -\infty$ ұмтылсын, онда $x'_n = -x_n \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} &= \lim_{x'_n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x'_n}\right)^{-x'_n} = \lim_{x'_n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x'_n}{x'_n - 1}\right)^{x'_n} = \lim_{x'_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x'_n - 1}\right)^{x'_n - 1 + 1} = \\ &= \lim_{x'_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x'_n - 1}\right)^{x'_n - 1} \cdot \lim_{x'_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x'_n - 1}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Сонымен $\lim_{x_n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ теңдігі дәлелденді, олай болса (15.6) теңдік дұрыс.

Екінші тамаша шекті былай да жазуға болады

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (15.8)$$

$$\text{Себебі } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{matrix} y = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty \end{matrix} \right] = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

$$\text{Мысал 1. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\text{Дәлелдеуі. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln e = 1.$$

$$\text{Мысал 2. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

$$\text{Дәлелдеуі. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

$$\text{Мысал 3. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Дәлелдеуі.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \left\{ \begin{array}{l} a^x - 1 = y \\ x \rightarrow 0, y \rightarrow 0. \\ x = \log_a(1+y) \end{array} \right. = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+y)}{y}} = \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a.$$

Мысал 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1.$

Бұл 3-ші мысалдағы теңдіктің дербес түрі $a = e$.

Мысал 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$

Дәлелдеуі.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \left\{ \begin{array}{l} (1+x)^\alpha = e^y \\ x \rightarrow 0, y \rightarrow 0. \\ 1+x = e^{y/\alpha} \\ x = e^{y/\alpha} - 1 \end{array} \right. = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{e^{y/\alpha} - 1} \cdot \frac{y}{y} \cdot \alpha = \alpha \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^{y/\alpha} - 1} =$$

$$= \alpha \cdot 1 \cdot 1 = \alpha.$$

§16. Функцияларды салыстыру

f және φ функциялары x_0 нүктенің ойылған аймағында $U_\delta^0(x_0)$ анықталып, $\forall x \in U_\delta^0(x_0)$ үшін $|f(x)| \leq c|\varphi(x)|$ теңсіздігі орындалса, мұндағы $c > 0$, онда f функциясы φ -ге қарағанда $U_\delta^0(x_0)$ маңайында шенелген деп аталады да

$$f(x) = O(\varphi(x)), \quad x \rightarrow x_0 \quad (16.1)$$

символымен белгіленеді. Ол былай оқылады $x \rightarrow x_0$ -ге ұмтылғанда $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ -пен салыстырғанда O үлкен, немесе « x_0 -де f , φ -ге қарағанда O үлкен».

Мысалдар. 1) E жиынында $f(x) = O(1)$ деген символ, f функциясының E жиынында шенелгендігін көрсетеді.

$$2) \sin x = O(1), \quad \sin x = O(x), \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$x = O(x^2) \quad x \in [1, +\infty)$$

$$x^2 = O(x) \quad x \in [0, 1]$$

$\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функциялары x_0 нүктенің қайсібір ойылған аймағында $U_\delta^0(x_0)$ анықталсын және $\forall x \in U_\delta^0(x_0)$ үшін $\psi(x) \neq 0$ болсын. Егер

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0 \quad (16.2)$$

болса, бұл факты

$$\varphi(x) = o(\psi(x)), \quad x \rightarrow x_0, \quad (16.3)$$

символымен белгіленеді. Ол былай оқылады « x x_0 -ге ұмтығанда $\varphi(x)$ функциясы $\psi(x)$ -пен салыстырғанда o кішкене».

Мысалдар.

$$1) x^2 = o(x) \quad x \rightarrow 0$$

$$2) x^n = o(x^m) \quad x \rightarrow 0 \text{ егер } m < n.$$

$$3) x^n = o(x^m) \quad x \rightarrow \infty \text{ егер } m > n.$$

$$4) (x-a)^4 = o((x-a)^3) \quad x \rightarrow a.$$

$$5) 1 - \cos x = o(x) \quad x \rightarrow 0 \text{ себебі } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

$\varphi(x) = o(1)$, $x \rightarrow x_0$ символы $\varphi(x)$ функцияның $x \rightarrow x_0$ ұмтылған ақырсыз кішкене функция екендігін көрсетеді O және o символдарын *Ландау символдары* деп атайды.

Анықтама. $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функцияларын $x \rightarrow x_0$ эквивалентті дейді, егер

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1 \quad (16.4)$$

шарты орындалса. Бұл шартты қысқаша

$$\varphi(x) \approx \psi(x), \quad x \rightarrow x_0 \quad (16.5)$$

символымен белгілейді.

Мысалдар.

$$1) \sin x \approx x, \quad x \rightarrow 0$$

$$2) \frac{1 - \cos x}{2} \approx \frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow 0$$

$$3) \ln(1+x) \approx x, \quad x \rightarrow 0$$

$$4) e^x - 1 \approx x, \quad x \rightarrow 0$$

$$5) a^x - 1 \approx x \ln a, \quad x \rightarrow 0$$

$$6) \operatorname{tg} x \approx x, \quad x \rightarrow 0$$

$$7) \arcsin x \approx x, \quad x \rightarrow 0$$

$$8) \operatorname{arctg} x \approx x, \quad x \rightarrow 0$$

$$9) (1+x)^\alpha - 1 \approx \alpha x, \quad x \rightarrow 0.$$

эквивалентті функциялардың кейбір қасиеттерін келтірейік.

1-қасиет. Егер

$$\varphi(x) \approx \psi(x), \quad x \rightarrow x_0, \quad (16.6)$$

болса, онда

$$\psi(x) \approx \varphi(x), \quad x \rightarrow x_0. \quad (16.7)$$

Дәлелдеуі. Егер $\forall x \in U_\delta(x_0) \quad \psi(x) \neq 0$ және (16.6) орындалса, $\varphi(x) \neq 0$, мүмкін x_0 -дің кішірейген аймағында. Олай болса

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\psi(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{\phi(x)}{\psi(x)}} = \frac{1}{1} = 1.$$

2-қасиет. Егер $x \rightarrow x_0$ $\psi_1(x) \approx \psi_2(x)$ болса, онда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\phi(x) \cdot \psi_1(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [\phi(x) \cdot \psi_2(x)] \quad (16.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{\phi(x)}{\psi_1(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{\phi(x)}{\psi_2(x)} \right] \quad (16.9)$$

Бұл теңдіктерді былай түсінуге болады, егер оң жақтағы шектер бар болса, онда сол жақтардың шегі бар және олар бір-бірімен тең, және керісінше. Осыдан, егер осы шектердің біреуі болмаса онда екіншісі де болмайды.

Дәлелдеуі. (16.8)-дің дұрыстығын дәлелдейік. Осы теңдіктің оң жақтағы шегі бар болсын. Онда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [\phi(x) \cdot \psi_1(x)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\phi(x) \cdot \psi_2(x) \cdot \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} [\phi(x) \cdot \psi_2(x)] \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} [\phi(x) \cdot \psi_2(x)] \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow x_0} [\phi(x) \cdot \psi_2(x)] \end{aligned}$$

$$\text{Мысал. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

§17. Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері

Егер функция $[a, b]$ кесіндінің әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда оны осы кесіндіде үзіліссіз деп атайды.

1-теорема. (Вейерштрассның бірінші теоремасы).

Егер f функциясын $[a, b]$ кесіндіде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде шенелген, яғни

$$(\exists M > 0) \quad |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b] \quad (17.1)$$

Дәлелдеуі. Бұл теореманы дәлелдеу үшін кері жорыйық. f функциясын $[a, b]$ -да шенелмеген деп алайық. Онда әрбір натурал n санына $x_n \in [a, b]$ нүктесі табылып

$$f(x_n) > n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (17.2)$$

теңсіздігі орындалады.

$\{x_n\}$ тізбегі $[a, b]$ жатқандықтан, ол тізбек шенелген. Осы тізбектен $\alpha \in [a, b]$ санына ұмтылатын жинақталатын $\{x_n\}$ тізбекше бөліп алуға болады. f функциясы α нүктеде үзіліссіз болғандықтан

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha) \quad (17.3)$$

(17.3)-ші қасиет (17.2)-ші қасиетке қайшылық болып тұр. Сондықтан f функциясы $[a, b]$ -да тек қана шенелген.

2-теорема. (Вейерштрассның екінші теоремасы).

Егер f функциясы $[a, b]$ -да үзіліссіз болса, онда оның осы кесіндіде минимумы мен максимумы бар болады, яғни $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta), \quad \forall x \in [a, b]$

теңсіздіктерді қанағаттандыратын $\alpha, \beta \in [a, b]$ нүктелері табылады. Басқаша айтқанда

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(\alpha), \quad \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(\beta)$$

Дәлелдеуі. 1-теорема бойынша функция жоғарыдан k деген санмен шенелген

$$f(x) \leq k, \quad (\forall x \in [a, b]) \quad (17.4)$$

Олай болса f функцияның $[a, b]$ кесіндіде супремумы бар болады (яғни дәл жоғарғы шекарасы бар болады):

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = M \quad (17.5)$$

M саны супремум болғандықтан, әрбір натурал n саны үшін

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \quad (n = 1, 2, \dots)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $x_n \in [a, b]$ нүктесі табылады. $[a, b]$ кесіндіде жатқан $\{x_n\}$ тізбек шенелген болғандықтан одан $\beta \in [a, b]$ санына жинақталатын $\{x_n\}$ тізбекше бөліп алуға болады. f функциясы β нүктеде үзіліссіз болғандықтан

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\beta)$$

Басқа жағынан

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M \quad (k = 1, 2, \dots)$$

және $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$.

$f(x_{n_k})$ -ның шегі тек қана біреу болғандықтан $M = f(\beta)$

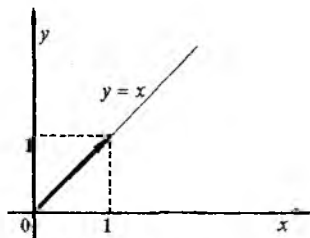
Сонымен f функциясы өзінің максимумына β нүктеде жетеді. Теореманың екінші бөлігі де осылайша дәлелденеді.

1-мысал. $y = x, \quad x \in (0, 1)$

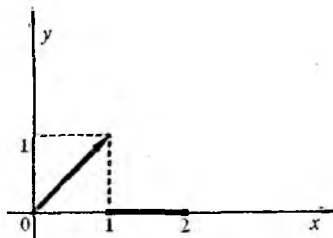
Бұл функция $(0, 1)$ интервалында үзіліссіз, оның бұл аралықта максимумы да және минимумы да жоқ, бірақ $\sup y = 1, \quad \inf y = 0$ (51-сурет).

2-мысал. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

Бұл функцияның максимумы жоқ. Себебі функция $x = 1$ нүктеде үзілісті (52-сурет).



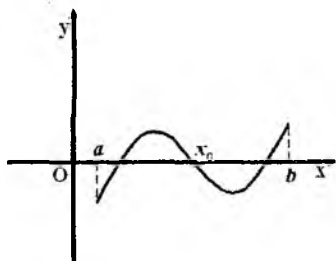
51-сурет



52-сурет

3-теорема. Егер f функциясы $[a, b]$ -да үзіліссіз және $f(a)$ және $f(b)$ сандары нөлге тең емес және таңбалары әртүрлі болса, онда (a, b) интервалында ең кем дегенде бір x_0 нүктесі табылып $f(x_0) = 0$ болады (53-сурет).

Дәлелдеуі. $[a, b]$ кесіндіні σ_0 деп белгілейік σ_0 екі тең бөлікке бөлеміз. Егер σ_0 -дің ортасындағы нүктеде функцияның мәні нөл болса, онда теорема дәлелденді. Бұл кесіндінің ортасындағы нүктеде функция мәні нөлге тең болмасын, онда екі бөліктің біреуінің соңғы нүктелерінде функция мәндері әртүрлі таңбалы болады. Сол бөлікті σ_1 деп белгілейміз, егер осы кесіндінің орта



53-сурет

нүктесінде функция мәні нөл болса, онда теорема дәлелденді, ал егер нөл болмаса, соңғы нүктелерінде функция әртүрлі таңбалы болатын бөлікті σ_2 деп белгілейміз. Осы процессті әрі қарай жалғастырамыз. Сонымен мынандай кесінділер тізбегін аламыз: $\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \dots \sigma_n \supset \dots$ болады.

Сонымен барлық σ_n -де жататын және $[a, b]$ кесіндіде жататын x_0 нүктесі табылып $f(x_0) = 0$ болады. Ал егер $f(x_0) > 0$ (немесе $f(x_0) < 0$) болсын десек, онда функция өзінің таңбасын сақтайтын $U(x_0)$ аймақ табылады. Бұлай болуы мүмкін емес, себебі $n \rightarrow \infty$, $\sigma_n \subset U(x_0)$, ал $f(x)$ функция σ_n -де әртүрлі таңбалы, яғни өзінің таңбасын сақтамайды. Сондықтан $f(x_0) = 0$.

Салдар. Егер f функциясы $[a, b]$ -да үзіліссіз болса, $f(a) = A$, $f(b) = B$ ($A \neq B$) және C саны A және B сандардың арасындағы кез келген сан болса, онда (a, b) аралығында ең кемінде бір x_0 нүктесі табылып, $f(x_0) = C$ болады.

Дәлелдеуі: $F(x) = f(x) - C$ деп белгілейік. $F(a) < 0$, $F(b) > 0$. Онда 3-ші теорема бойынша (a, b) аралығынан ішінен x_0 нүктесі табылып $F(x_0) = 0$, $f(x_0) - C = 0 \Rightarrow f(x_0) = C$ болады.

Анықтама. X жиынында анықталған f функциясын осы жиында бірқалыпты үзіліссіз деп атайды, егерде кез келген $\varepsilon > 0$ санына тек қана ε -ге байланысты $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $|x' - x''| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\forall x', x'' \in X$ үшін

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса.

1-мысал. $f(x) = x$ функциясы $\forall x \in R$ нүктесінде бірқалыпты үзіліссіз. Шынында да, $\delta = \varepsilon$ деп алсақ, $|x' - x''| < \delta$ болғанда $|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \delta = \varepsilon$ яғни $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

2-мысал. $f(x) = x^2$ функциясы кезкелген $\forall x \in R$ нүктесінде бірқалыпты үзіліссіз еместігін анықтама бойынша көрсетейік.

$(\exists \varepsilon > 0) (\forall \delta > 0) (\exists x', x'' : |x' - x''| < \delta) : |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$ екендігін көрсетейік. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ деп алайық. Екі тізбекті қарастырайық $\{x'_n\}$ және $\{x''_n\}$ мұндағы $x'_n = \sqrt{n}$, $x''_n = \sqrt{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$).

$$|x'_n - x''_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0, \text{ егер } n \rightarrow \infty, \text{ ал}$$

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = |x_n'^2 - x_n''^2| = |n+1 - n| = 1.$$

Сондықтан кез келген $\delta > 0$ -ға екі x'_n және x''_n табылып $|x' - x''| < \delta$ да, $|f(x') - f(x'')| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$. Бұл $f(x) = x^2$ функциясының барлық өсте бірқалыпты үзіліссіз еместігін көрсетеді.

4-теорема. (Кантордың теоремасы).

Егер f функциясы $[a, b]$ кесіндіде үзіліссіз болса, онда ол осы аралықта бірқалыпты үзіліссіз. (Дәлелдемейміз).

5-теорема. Егер f функциясы $[a, b]$ кесіндіде анықталған және қатаң бірсарынды болса, $[A, B]$ кесіндісі f функцияның мәндерінің жиыны болса, онда f^{-1} кері функция бар болып $[A, B]$ кесінді де қатаң бірсарынды және үзіліссіз болады. (Дәлелдемейміз).

§18. Туынды

Анықтама. f функцияның x нүктедегі туындысы деп, оның осы нүктедегі Δf өсімшесінің оған сәйкес аргументтің Δx өсімшесіне қатынасының Δx нөлге ұмтылғандағы шегін айтады, егер ол шек бар болса. Сонымен, анықтама бойынша

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (18.1)$$

Туындыларды $f(x)$, y' , $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ символдарымен белгілейді. Егер $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty$

немесе $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty$ болса, онда f функцияның x нүктеде шенелмеген туындысы бар дейді.

Мысал. $y = x^2$ функцияның туындысын анықтаманы пайдаланып табу керек.

$$\begin{aligned} y(x) &= x^2, \quad y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2, \quad \text{ал } \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = \\ &= \Delta x(2x + \Delta x). \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \quad \text{Сонымен } (x^2)' = 2x. \end{aligned}$$

Анықтама. Егер f функциясы x нүктенің кейбір маңайында оң жақты (сол жақты) анықталса және $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ шек бар болса, онда ол f функцияның x нүктедегі оң жақты (сол жақты) туындысы деп аталады да $f'_+(x)$ ($f'_-(x)$)

(немесе $f'_-(x)$) деп белгіленеді.

Оң жақты және сол жақты туындыларды бір жақты туындылар деп те атайды.

Егер f функцияның $[a, b]$ кесіндінің барлық ішкі нүктелерінде туындысы болса, ал a нүктеде оң жақты, b нүктеде сол жақты туындысы болса, онда f функцияның $[a, b]$ кесіндіде туындысы бар дейді.

Сонымен, f функцияның x нүктеде туындысы болуы үшін $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$ болуы керек.

Егер $f'_+(x) \neq f'_-(x)$ болмаса, онда f функциясының x нүктеде туындысы жоқ.

Мысал. $y = |x|$ функциясын қарастырайық (54-сурет).

$$\begin{aligned} \text{Егер } x > 0 \text{ болса, онда өте аз } \Delta x \text{ үшін } x + \Delta x > 0 \text{ және } \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \\ &= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad (x > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Егер } x < 0 \text{ болса, онда өте аз } \Delta x \text{ үшін } x + \Delta x < 0 \text{ және } \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \\ &= \frac{-x - \Delta x + x}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1, \quad (x < 0). \end{aligned}$$

$$\text{Сонымен } (|x|)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{егер } \Delta x > 0 \\ -1, & \text{егер } \Delta x < 0. \end{cases}$$

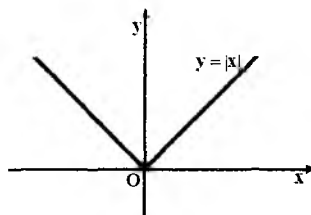
Енді $x = 0$ болсын. Онда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \text{sign} \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} = \text{sign} \Delta x = \begin{cases} 1, & \text{егер } \Delta x > 0 \\ -1, & \text{егер } \Delta x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Сондықтан } \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta x > 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta x < 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

$$f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1, \quad f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

Сонымен $|x|$ функцияның $x = 0$ нүктеде туындысы жоқ.



54-сурет

Теорема. x нүктеде шенелген туындысы бар кез келген функция осы нүктеде үзіліссіз.

Дәлелдеуі. $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ бар болсын. Онда бұл теңдікті былай жазуға болады

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x) \quad (18.2)$$

мұндағы $\varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0$, егер $\Delta x \rightarrow 0$, яғни $\Delta x \rightarrow 0$ ұмтылғанда $\varepsilon(\Delta x)$ ақырсыз кішкене шама. (18.2) формуладан

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(x) \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \Delta x] = 0.$$

Бұл теңдік $f(x)$ функцияның x нүктеде үзіліссіз екендігін көрсетеді.

§19. Қарапайым элементарлық функциялардың туындысы

1-мысал. $f(x) = C$ (тұрақты) функцияның туындысын табу керек. $x + \Delta x$ мәнде $f(x + \Delta x) = C$ тең. Сондықтан $\Delta f = C - C = 0$. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$. Олай болса тұрақты санның туындысы нөлге тең, яғни $C' = 0$.

2-мысал. $f(x) = \sin x$ функциясын қарастырайық.

$$\Delta f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \cos x.$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

3-мысал. $f(x) = \cos x$ функциясын қарастырайық.

$$\Delta f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = - \sin\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = -\sin x.$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

4-мысал. $f(x) = a^x$ Көрсеткіштік функцияның туындысында анықтаманы пайдаланып табамыз.

$$\Delta f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

5-мысал. $f(x) = e^x$ функция 4-мысалдағы функцияның дербес түрі, $a = e$. Сондықтан $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$. $(e^x)' = e^x$.

6-мысал. $f(x) = x^n$ ($n = 1, 2, \dots$) дәрежелі функцияның туындысын табу керек.

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}(\Delta x)^3 + \\ &+ \dots + (\Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}(\Delta x)^3 + \dots + (\Delta x)^n. \end{aligned}$$

U және V функциялары x нүктеде дифференциалданатын болғандықтан олар осы нүктеде үзіліссіз, сондықтан $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} V(x + \Delta x) = V(x)$ Сонымен (20.2) формула дәлелденді. Қалған формулалар да тура осылай дәлелденеді.

2-теорема. (Күрделі функцияны дифференциалдау).

Егер g функциясы x_0 нүктесінде, ал f функциясы $y_0 = g(x_0)$ нүктесінде дифференциалданатын болса, онда $F(x) = f[g(x)]$ күрделі функция x_0 нүктесінде дифференциалданады және

$$\left. \begin{aligned} F'(x_0) &= f'(y_0)g'(x_0) \\ F'(x) &= f'(y)g'(x) \end{aligned} \right\} y = g(x) \quad (20.5)$$

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

$y = g(x)$ функция үзіліссіз болғандықтан $x \rightarrow x_0$ ұмтылғанда $y \rightarrow y_0 = g(x_0)$ ұмтылады. Олай болса

$$F'(x_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(y_0)g'(x_0).$$

Жалпы жағдайда $F'(x) = f'(y)g'(x)$.

9-мысал. $f(x) = \lg x$.

$$(\lg x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Сонымен, } (\lg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

10-мысал. $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

$$\text{Сонымен, } (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

11-мысал. $f(x) = \operatorname{sh} x$, $f(x) = \operatorname{ch} x$, $f(x) = \operatorname{th} x$, $f(x) = \operatorname{cth} x$.

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \left(\frac{e^x}{2} \right)' - \left(\frac{e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x. \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

Тура осылай $(chx)' = shx$, $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$, $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$ екендігін дәлелдеуге болады.

3-теорема. (Кері функцияның туындысы.)

$y = f(x)$ функцияның (a, b) интервалда кері функциясы бар болсын $x = f^{-1}(y) = g(y)$ және $x \in (a, b)$ үшін $f'(x) \neq 0$.

Онда

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ немесе } x'_y = \frac{1}{y'_x}. \quad (20.6)$$

Дәлелдеуі. y -ке $\Delta y \neq 0$ деген өсімше берейік. Оған кері функцияның $\Delta x \neq 0$ өсімшесі сәйкес келеді. Сондықтан

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \quad (20.7)$$

Егер $\Delta y \rightarrow 0$, онда $\Delta x \rightarrow 0$ ұмтылады, себебі $g(y)$ үзіліссіз функция, ал $\Delta x \rightarrow 0$ ұмтылса, онда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x) \neq 0$ ұмтылады. Сондықтан

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

12-мысал. $y = \arcsin x$ функцияның кері функциясы $x = \sin y$. Сондықтан (20.6) формула бойынша $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

13-мысал. $y = \arccos x$ функцияның кері функциясы $x = \cos y$.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

14-мысал. $y = \operatorname{arctg} x$ функцияның кері функциясы $x = \operatorname{tg} y$.

$$\text{Сондықтан } y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}, \text{ яғни } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

15-мысал. Тура осылай $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$ екендігін дәлелдеуге болады.

16-мысал. $y = \operatorname{Arsh} x$ функцияның кері функциясы $x = \operatorname{sh} y$.

$$\text{Сондықтан } y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \quad (\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

17-мысал. $y = x^\alpha$ дәрежелі функцияның туындысын табу керек (мұндағы α кез келген нақты сан).

Бұл функцияны былай да жазуға болады $y = e^{\alpha \ln x}$.

Күрделі функцияның туындысы бойынша

$$y' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Сонымен, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Бұл формула 6-мысалдағы x^n функцияның туындысындай (мұндағы n - натурал сан).

Логарифмдік туынды. $y = f(x) > 0$ күрделі функциядан туынды табу керек болсын. Ол үшін функцияның екі жағын да логарифмдеп, содан туынды аламыз.

$$y = f(x), \ln y = \ln f(x). \text{ Осыдан } \frac{y'}{y} = (\ln f(x))' \Rightarrow y' = y [\ln f(x)]' = f(x) [\ln f(x)]'.$$

18-мысал. $y = x^x$, $x > 0$. Осы функцияның туындысын табу үшін екі жағын да логарифмдейміз.

$$\ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).$$

$$19\text{-мысал. } y = \sqrt[3]{(x^2 + 3)^2}. \text{ Осыдан } \ln y = \frac{2}{3} \ln(x^2 + 3)$$

$$y' = \sqrt[3]{(x^2 + 3)^2} \left(\frac{2}{3} \ln(x^2 + 3) \right)' = \sqrt[3]{(x^2 + 3)^2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{x^2 + 3} \right) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 + 3}}.$$

$$20\text{-мысал. } y = U(x)^{V(x)}, U(x) > 0.$$

$$y' = U^V [V \ln U]' = U^V \left[V' \ln U + \frac{V}{U} U' \right] = U^V V' \ln U + V U^{V-1} U'.$$

Бұл формуланы есте сақтау үшін, алдымен функцияны көрсеткіш функция деп, содан кейін дәрежелі функция деп қарастырған дұрыс немесе керісінше.

§21. Негізгі туындылардың кестесі

$$1. C' = 0, \quad C = \text{const.}$$

$$2. (x^a)' = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$3. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x > 0)$$

$$4. (a^x)' = a^x \ln a, \quad (0 < a \neq 1).$$

$$5. (e^x)' = e^x.$$

$$11. (\operatorname{ctgx})' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$12. (\operatorname{shx})' = \operatorname{chx}.$$

$$13. (\operatorname{chx})' = \operatorname{shx}.$$

$$14. (\operatorname{thx})' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$15. (\operatorname{cth x})' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$6. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0, \quad 0 < a \neq 1)$$

$$7. (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$8. (\sin x)' = \cos x.$$

$$9. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$20. (\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$21. (|f(x)|)' = f(x) \operatorname{sign} f(x), \text{ мұндағы } \operatorname{sign} f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } f(x) > 0 \\ -1, & \text{егер } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$22. (u^v)' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'.$$

$$16. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

$$17. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

$$18. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$19. (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Дифференциалдаудың негізгі ережелері

$$1. (U \pm V)' = U' \pm V'$$

$$2. (UV)' = U'V + V'U$$

$$3. (CU)' = CU', \quad C = \operatorname{const}$$

$$4. \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

$$5. \left(\frac{C}{V}\right)' = -\frac{CV'}{V^2}, \quad C = \operatorname{const}$$

$$6. (f[g(x)])' = f'g'$$

$$7. y'_x = \frac{1}{x'_y}, \quad \text{әдәдә } y = f(x); \quad x = \varphi(y) \text{ болса.}$$

§22. Туындының геометриялық мағынасы

f функциясы x_0 нүктенің кейбір аймағында анықталсын (55-сурет). $A(x_0, f(x_0))$ және $B(x_1, f(x_1))$ екі нүктеден өтетін L түзудің теңдеуі мынаған тең:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \quad (22.1)$$

Бұл L қиманың теңдеуін мына түрге келтіруге болады

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) + f(x_0). \quad (22.2)$$

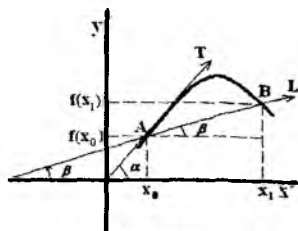
Қиманың бұрыштық коэффициенті мынаған тең

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \beta. \quad (22.3)$$

Егер B нүктесі f функцияның графигінің бойымен A нүктеге ұмтылса, онда L түзуі A нүктеден қысыққа жүргізілген T жанамаға ұмтылады. Ал

$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$ шектің шенелген

шегі бар болса, ол A нүктеден графикке жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті деп аталды. Сонымен $f(x)$ функцияның x_0 нүктедегі туындысы графикке A нүктеден жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентіне тең, яғни



55-сурет

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha. \quad (22.4)$$

(22.2) теңдеуден жанаманың теңдеуі шығады:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (22.5)$$

A нүктедегі графикке жүргізілген жанамаға перпендикуляр түзу f функциясының осы нүктедегі нормалі деп аталады. Екі перпендикуляр түзудің бұрыштық коэффициенттері мына теңдікті қанағаттандырады

$$K_{\text{нор}} \cdot K_{\text{жам}} = -1 \Rightarrow K_{\text{нор}} = -\frac{1}{K_{\text{жам}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Сондықтан нормалдың теңдеуі мынаған тең

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \quad (22.6)$$

(егер $f'(x_0) \neq 0$).

Мысал. $y = x^2$ функцияға $A(2, 4)$ нүктедегі жүргізілген жанаманың және нормалдың теңдеулерін табу керек.

Шешімі.

$f'(x_0) = 4$, $x_0 = 2$. $y' = 2x$, $y'(2) = 4$. Олай болса, $y = y'(2)(x - 2) + 4 \Rightarrow y = 4(x - 2) + 4 \Rightarrow y = 4x - 4$ жанаманың теңдеуі. Ал $y = -\frac{1}{y'(2)}(x - 2) + 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x - 2) + 4 \Rightarrow 4y = -x + 2 + 4 \Rightarrow x + 4y - 6 = 0$ - нормалдың теңдеуі.

§23. Функцияның дифференциалы

Анықтама. $y = f(x)$ функциясын x нүктеде дифференциалданады дейді, егер оның осы нүктедегі өсімшесін $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ мынандай түрге келтіруге болса

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x) \quad (23.1)$$

мұндағы A нақты сан (егер x нүктесі бекітілсе) және $o(\Delta x)$ функциясы Δx -ке қарағанда жоғарғы ретті аз шама, егер $\Delta x \rightarrow 0$, яғни $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$

Теорема. f функциясы x нүктеде дифференциалдану үшін, яғни оның өсімшесін (23.1) түрде жазуға болатын болса, осы нүктеде оның шенелген туындысының болуы қажетті және жеткілікті, онда $A = f'(x)$.

Жеткіліктілігі. $f'(x)$ бар болсын, яғни $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + o(\Delta x)$
 $o(\Delta x) \rightarrow 0$ егер $\Delta x \rightarrow 0$, осыдан $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \Rightarrow \Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$

Мұндағы $o(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x$ егер $\Delta x \rightarrow 0$. Онда функция дифференциалданады.

Қажеттілігі. f функциясы x нүктеде дифференциалданатын болсын, яғни (23.1) формула орындалсын. $\Delta x \neq 0$ деп алып теңдіктің екі жағын Δx -ке бөлеміз.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \rightarrow 0. \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x) \quad \text{себебі} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Сонымен (23.1) формуланы былай да жазуға болады

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad (23.2)$$

(23.2) формуладағы Δx -ке байланысты $f'(x)\Delta x$ сызықты функция f функцияның x нүктедегі *дифференциалы* деп аталады да $df(x)$ немесе dy символымен белгіленеді. Сонымен анықтама бойынша

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x. \quad (23.3)$$

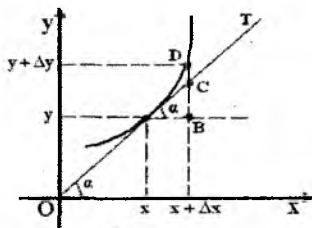
Жалпы жағдайда $\Delta y \neq dy$, тек сызықты функцияның өсімшесі мен дифференциалы тең, яғни егер $y = ax + b$ болса, онда $\Delta y = a\Delta x = dy$. Дербес жағдайда $y = x$ болса, $dy = dx = \Delta x$ яғни тәуелсіз айнымалының дифференциалы мен өсімшесі тең ($dx = \Delta x$).

Сондықтан кез келген f функцияның дифференциалын былай жазуға болады

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad \text{яғни}$$

f функцияның x нүктедегі туындысы функцияның осы нүктедегі дифференциалының x тәуелсіз айнымалының дифференциалының қатынасына тең.

Дифференциалдың геометриялық мағынасын анықтайық (56-сурет). Ол үшін $y = f(x)$



56-сурет

функцияның графигіне $A(x, y)$ нүктеден AT жанама жүргіземіз және осы жанаманың $x + \Delta x$ нүктедегі ординатасын қарастырамыз. Суреттен $AB = \Delta x$, $BD = \Delta y$. Тікбұрышты ABC үшбұрыштан

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{\Delta x} \Rightarrow BC = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x.$$

Туындының геометриялық мағынасынан $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$. Сондықтан $BC = f'(x) \cdot \Delta x$. Бұл формуланы (23.3) пен салыстырып $dy = BC$ екендігін аламыз, яғни $y = f(x)$ функцияның x нүктедегі дифференциалы осы нүктенен графикке жүргізілген жанаманың $x + \Delta x$ нүктедегі ординатасының өсімшесіне тең.

Ал $CD = BD - BC = \Delta y - dy = o(\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$.

f және g функциялардың дифференциалдары үшін мына формулалар дұрыс:

$$d(\alpha f \pm \beta g) = \alpha df \pm \beta dg, \quad \alpha, \beta \in R.$$

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

$$\text{Дәлелдеуі. } d\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{f}{g}\right)' dx = \frac{gf' - fg'}{g^2} dx = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

§24. Дифференциалды жуықтап есептеулерде қолдану

Дифференциалдың көмегімен f функцияның $\S x_0$ нүктеге жақын x нүктесіндегі мәнін есептеуге болады.

$\Delta f(x) = df(x) + o(\Delta x)$ формуланы былай жазуға болады

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$. Мұндағы $o(x - x_0)$ мүшесін алып тастасақ шексіз аз шама деп, егер $x \rightarrow x_0$, онда

$$\Delta f(x) \approx df(x) \text{ немесе } f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (24.1)$$

Осы формула арқылы функцияның x нүктедегі мәнін жуықтап есептеуге болады.

Мысал 1. $y = x^2$ функцияның dy дифференциалын Δy және өсімшесін

1. x пен Δx -тің кез келген мәнінде
2. $x = 20$, $\Delta x = 0,1$ мәнінде табындар.

Шешімі. 1) $y' = 2x$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.
 $dy = f'(x)\Delta x = 2x \cdot \Delta x$.

$$2) \Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 + (0,1)^2 = 4,01.$$

$$dy = 2x \cdot \Delta x = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 = 4.$$

Сонымен Δy - ті dy -пен алмастырғандағы болатын қателік 0,01-ге тең.

Мысал 2. $f(x) = \sin x$ функцияның $x = 46^\circ$ нүктедегі мәнін жуықтап есептөңдер.

Шешімі.

$$f'(x) = \cos x, \sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x, x_0 = \frac{\pi}{4}, \Delta x = \frac{\pi}{180}, x_0 + \Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$$

$$\text{деп алып } \sin 46^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx \\ \approx 0,7071 + 0,7071 \cdot 0,0175 \approx 0,7194.$$

Мысал 3. $y = \ln x$ функцияның $x = 1,1$ нүктедегі мәнін жуықтап есептеңдер.

Шешімі. $x_0 = 1, \Delta x = 0,1. f'(x) = \frac{1}{x}.$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = \ln 1 + \left(\frac{1}{x}\right)_{x_0=1} \cdot 0,1 = 0,1. \text{ Сонымен } \ln 1,1 \approx 0,1.$$

Мысал 4. $\sqrt[3]{8,12}$ жуықтап есептеңдер.

Шешімі. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функциясын қарастырамыз.

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}, f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \text{ Мұндағы } x_0 + \Delta x = 8,12, x_0 = 8,$$

$$\Delta x = 0,12, f'(x_0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}, f(x_0) = 2.$$

$$\text{Олай болса } f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x = 2 + \frac{1}{12} \cdot 0,12 = 2 + 0,01 = 2,01; \sqrt[3]{8,12} \approx 2,01.$$

§25. Жоғарғы ретті туындылар

X -тің әрбір нүктесінде $y = f(x)$ функциясы дифференциалданатын болсын. Оның $x \in X$ нүктедегі туындысы $g(x) = f'(x)$ тәуелсіз x -тің функциясы болсын. Егер g функциясы x нүктеде дифференциалданатын болса, онда оның туындысы $g'(x) = [f'(x)]'$ тең, бұл туынды f функциясының екінші ретті туындысы деп аталады да, $f''(x)$ деп белгіленеді. Сонымен $f''(x) = [f'(x)]'$. Солайша f функцияның үшінші ретті туындысы, $f'''(x) = [f''(x)]'$ тен. Тура осылай, f функцияның n -ші ретті туындысы

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad n = 1, 2, \dots \quad (25.1)$$

Егер X -тің әрбір нүктесінде f функциясы n рет дифференциалданса және $f^{(n)}(x)$ функциясы X -те үзіліссіз болса, онда f -ті n -рет үзіліссіз дифференциалданады немесе $C^{(n)}[X]$ класстағы функция дейді. X -те анықталған үзіліссіз функциялар жиынын $C[X]$ деп белгілейді.

$$1\text{-мысал. } y = x^3, \quad y' = 3x^2, \quad y'' = 3 \cdot 2x, \quad y''' = 3! = 6, \quad y^{(4)} = 0.$$

$$2\text{-мысал. } y = e^{kx}, y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \dots, y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

$$3\text{-мысал. } y = \sin x.$$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad y'' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ y''' = \left(\sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \dots, (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (25.2)$$

4-мысал. $y = \cos x$ бұл функцияның n -ші ретті туындысы дәл 3-ші мысалдай дәлелденеді, яғни

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (25.3)$$

Теорема. Егер u және $v \in C^{(n)}[X]$ классындағы функциялар болса, онда

$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}, \quad (25.4)$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)} = \sum_{m=0}^n C_n^m u^{(n-m)}v^{(m)} \quad (25.5)$$

мұндағы $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, $C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

(25.5) формула Лейбництің формуласы деп аталады. (Лейбництің формуласын математикалық индукция әдісін пайдаланып дәлелдеуге болады).

5-мысал. $y = x^3 \sin x$ функциясының 10-шы ретті туындысын табу керек. ($y^{(10)} = ?$).

Шешімі. Лейбниц формуласын пайдаланып $u = \sin x$, $v = x^3$ - деп белгілеп,

$$(25.2) \text{ формула бойынша } (\sin x)^{(10)} = \sin\left(x + 10 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 5\pi\right) = -\sin x,$$

$$(\sin x)^{(9)} = \sin\left(x + 9 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x,$$

$$(\sin x)^{(8)} = \sin\left(x + 8 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + 4\pi) = \sin x,$$

$$(\sin x)^{(7)} = \sin\left(x + 7 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x,$$

$$v' = 3x^2, \quad v'' = 6x, \quad v''' = 6, \quad v^{(4)} = 0, \dots$$

$$y^{(10)} = (x^3 \sin x)^{(10)} = x^3 \cdot (\sin x)^{(10)} + 10 \cdot (x^3)' \cdot (\sin x)^{(9)} + \frac{10 \cdot 9}{2} (x^3)'' \cdot (\sin x)^{(8)} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} (x^3)''' \cdot (\sin x)^{(7)} = \\ = -x^3 \sin x + 30x^2 \cos x + 270x \sin x - 720 \cos x.$$

6-мысал. $y = x^2 e^{3x}$ функциясының 5-ші ретті туындысын табу керек. ($y^{(5)} = ?$).

Шешімі. $u = e^{3x}$, $v = x^2$ - деп белгілейміз.

$$u' = 3e^{3x}, \quad u'' = 3^2 e^{3x}, \quad u''' = 3^3 e^{3x}, \quad u^{(4)} = 3^4 e^{3x}, \quad u^{(5)} = 3^5 e^{3x}$$

$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = 0, \dots$$

Лейбниц формуласы бойынша

$$y^{(5)} = (x^2 e^{3x})^{(5)} = x^2 (e^{3x})^{(5)} + 5(x^2)'(e^{3x})^{(4)} + \frac{5 \cdot 4}{2} (x^2)''(e^{3x})^{(3)} = 3^5 \cdot x^2 e^{3x} + 10 \cdot 3^4 \cdot x e^{3x} + 20 \cdot 3^3 \cdot e^{3x}.$$

§26. Параметрлік түрде берілген функцияның туындысы

y -пен x -тің арасындағы байланыс t параметрі арқылы берілсін, яғни

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t \in T) \quad (26.1)$$

Осы түрде берілген функцияны параметрлік түрде берілген функция деп атайды. Егер $y = \varphi(t)$ функциясының кері функциясы бар болса, яғни $t = \varphi^{-1}(x)$, онда $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$ деп түсіну керек. Демек, $y = f(x)$ функциясы (26.1) теңдіктер t параметрі арқылы берілген болып шығады.

Енді (26.1) арқылы берілген функцияның туындысын табу керек. Анықтама бойынша $y'_x = \frac{dy}{dx}$, $dy = \psi'(t)dt$, $dx = \varphi'(t)dt$.

$$y'_x = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{немесе} \quad y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (26.2)$$

Енді (26.1) функциясының екінші ретті туындысын табайық. (26.2) теңдіктен параметрлік түрде берілген жаңа функцияның теңдеуін аламыз, яғни

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \psi_1(t) \end{cases} \quad (t \in T) \quad (26.3)$$

Олай болса, y''_{xx} - (26.2) формула бойынша табылады

$$y''_{xx} = \frac{\psi'_1(t)}{\varphi'_1(t)} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t}{\varphi'_1(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2} \quad (26.4)$$

Тура осылай, егер $y^{(n-1)}_{x^{n-1}}$ белгілі болса, онда

$$y^{(n)}_{x^n} = \frac{\left(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (26.5)$$

Мысал. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ функцияның екінші ретті туындысын табу керек.

Шешімі. (26.2) формула бойынша $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctgt}$.

$$(26.4) \text{ формула бойынша } y''_{xx} = \frac{\psi'_1(t)}{\varphi'_1(t)} = \frac{(-\operatorname{ctgt})'_t}{(\cos t)'} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

§27. Айқындалмаған функцияның туындысы

$y = f(x)$ функциясы айқындалмаған түрде берілсін

$$F(x, y) = 0 \quad (27.1)$$

(27.1) теңдеуді x бойынша дифференциалдап және оны y' бойынша шешіп функцияның бірінші ретті туындысын табамыз. Бірінші туындыны x арқылы дифференциалдап айқындалмаған функцияның екінші ретті туындысын табамыз. Екінші туындыны x, y және y' арқылы өрнектейміз. Ал y' орнына табылған мәнді қойып, y'' -ты x және y арқылы өрнектейміз. Тура осылай үшінші және n -ші ретті туындыларды табамыз.

1-мысал. $x^2 + y^2 = 1$ айқындалмаған функцияның үшінші ретті туындысын табу керек.

Шешімі. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ теңдеуін x арқылы дифференциалдаймыз.

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}. \text{ Әрі қарай } y'' = -\frac{1 \cdot y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3},$$

$$\text{себебі } x^2 + y^2 = 1. \quad y''' = -\frac{1 \cdot 3y^2 \cdot y'}{y^6} = -\frac{3}{y^4} \left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3x}{y^5}.$$

2-мысал. $y^6 - y - x^2 = 0$ айқындалмаған функцияның бірінші ретті туындысын табу керек.

$$\text{Шешімі. } 6y^5 \cdot y' - y' - 2x = 0. \quad y'(6y^5 - 1) = 2x. \quad y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$$

§28. Жоғарғы ретті дифференциалдар

$y = f(x)$ функцияның x нүктесіндегі дифференциалы f функцияның осы нүктедегі туындысын тәуелсіз айнымалының дифференциалына көбейткенге тең

$$df = f'(x)dx. \quad (28.1)$$

Функцияның бұл дифференциалын бірінші ретті дифференциал деп атайды. Функцияның екінші ретті дифференциалы деп бірінші ретті дифференциалдың дифференциалын айтады және d^2f деп белгілейді, яғни $d^2f = d(df)$. Үшінші ретті дифференциал деп екінші ретті дифференциалдың дифференциалын айтады, яғни $d^3f = d(d^2f), \dots, d^n f = d(d^{n-1}f)$.

Егер x тәуелсіз айнымалы болса, онда оның дифференциалы dx x -ке байланысты болмайды. Сондықтан $(dx)' = (dx)'' = \dots = (dx)^{(n)} = 0$ болады.

$$\begin{cases} df = f'(x)dx \\ d^2f = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2 + f'(x)(dx)'dx = f''(x)dx^2 \\ d^3f = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)dx^3 \\ \dots \\ d^n x = f^{(n)}(x)dx^n \end{cases} \quad (28.2)$$

Енді x -ті t параметріне байланысты функция деп қарастырайық, яғни $x = \varphi(t)$, $t \in T$. Онда $y = f(x) = f(\varphi(t))$ күрделі функция болады. Осы функцияның диф-

ференциалын табайық.

$$dy = y'_t \cdot dt = y' \cdot x'_t \cdot dt = y'_x dx, \text{ мұндағы } dx = x'_t dt.$$

Бұл жағдайда

$$dy = y'_x dx = f'(x) dx. \quad (28.3)$$

(28.1) және (28.3) формулалардың түрлері тең болғандықтан, бірінші ретті дифференциалдың формаларының инварианттылық қасиеті сақталады дейді. Инвариант деп кейбір түрлендіруде өзгермейтін шаманы айтады. (28.1) формулада $dx = \Delta x$, ал (28.3) формулада $dx = x'_t dt$. Ал күрделі функцияның жоғарғы ретті дифференциалының форма бойынша инварианттылық қасиеттері сақталмайды. Шынында да $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ болсын, онда

$$d^2 f = d(df) = d(f'_x dx) = f''_{xx} dx^2 + f'_x d^2 x \quad (28.4)$$

Егер x тәуелсіз айнымалы болса, онда

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 \quad (28.5)$$

(28.1) және (28.5) формулалардан екінші ретті дифференциалдың форма бойынша инвариантты еместігі көрініп тұр.

Жоғарғы ретті дифференциалдардың қасиеттері:

1. $d^n(u \pm v) = d^n u \pm d^n v$
2. $d^n(cu) = cd^n u, c = \text{const}$
3. $d^n(u \cdot v) = \sum_{m=0}^n C_n^m d^{n-m} u \cdot d^m v$, мұндағы $d^0 u = u^{(0)} dx^0 = u$, $d^0 v = v^{(0)} dx^0 = v$,

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} - \text{терү саны.}$$

Мысал. $y = 3x^3 + 2x^2 + 1$ функцияның екінші ретті $d^2 y$ дифференциалын табу керек.

Шешімі. Берілген функцияны біртіндеп дифференциалдап, (28.2) формула бойынша

$$\begin{aligned} dy &= f'(x) dx = (9x^2 + 4x) dx, \\ d^2 y &= f''(x) dx^2 = (18x + 4) dx^2. \end{aligned}$$

§29. Функцияның төңіректік экстремумы

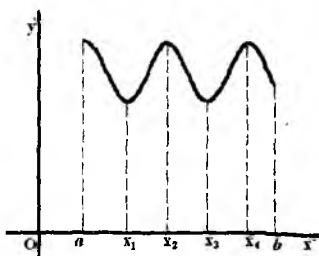
Анықтама. Егер $\delta > 0$ деген сан табылып, x_0 нүктенің δ маңайындағы барлық x үшін мына теңсіздік орындалса

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(x_0), \quad \forall x \in U(x_0, \delta) \\ f(x) &\geq f(x_0), \quad \forall x \in U(x_0, \delta), \end{aligned}$$

онда x_0 нүктесі f функцияның төңіректік максимум (минимум) нүктесі деп аталады.

Функцияның төңіректік максимумы немесе минимумы функцияның төңіректік экстремумы деп аталады.

Мысалы, 57-суреттегі x_1, x_3 - төңіректік минимум нүктелері, ал x_2, x_4 - төңіректік максимум нүктелері, ал a және b - біржақты төңіректік экстремум нүктелері.



57-сурет

1. Ферма теоремасы. (a, b) интервалында анықталған f функцияның $x_0 \in (a, b)$ нүктеде

төңіректік экстремум болсын. Егер бұл функцияның x_0 нүктеде шенелген туындысы $f'(x_0)$ бар болса, онда $f'(x_0) = 0$ болады.

Дәлелдеуі. Анығырақ болу үшін, x_0 нүктенің $U(x_0)$ маңайында анықталған f функцияға x_0 нүктесі төңіректік максимум нүктесі болсын, яғни

$$\forall x \in U(x_0), \quad f(x_0) \geq f(x). \quad (29.1)$$

Туындының анықтамасы бойынша

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, олай болса (29.1) бойынша $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$. Осыдан

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$, Δx - ке байланыссыз. Егер $\Delta x > 0$, онда

$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$, осыдан егер $\Delta x \rightarrow 0$, мынандай теңсіздік аламыз.

$$f'(x_0) \leq 0 \quad (29.2)$$

Егер $\Delta x < 0$, онда $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$, онда $\Delta x \rightarrow 0$

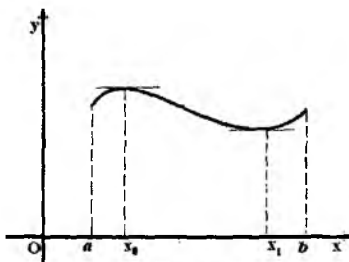
$$f'(x_0) \geq 0 \quad (29.3)$$

(29.2) және (29.3) формулалардан

$$f'(x_0) = 0 \quad (29.4)$$

Ферма теоремасының геометриялық мағынасы.

Егер $x_0 \in (a, b)$ нүктесі функцияның төңіректік максимум немесе минимум нүктесі болса және $f'(x_0)$ бар болса (58-сурет), онда $(x_0, f(x_0))$ нүктеден графикке жүргізілген жанама OX өсіне параллель болады. 58-суретте $(x_1, f(x_1))$ нүктеден графикке жүргізілген жанама OX өсіне параллель.

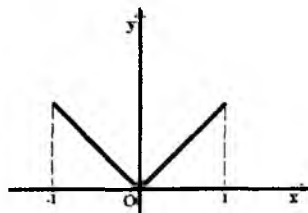


58-сурет

2. Ролль теоремасы. f функциясы 1) $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз; 2) (a, b) интервалдың әрбір нүктесінде дифференциалданатын; 3) $f(a) = f(b)$ болса, онда (a, b) интервалынан $f'(\xi) = 0$ болатын ең кем дегенде бір $\xi \in (a, b)$ нүктесі табылады.

Дәлелдеуі. Егер $f(x) = C = \text{const}$ болса $\forall x \in [a, b]$, онда $f(x_0) = 0, \forall x \in [a, b]$ Теорема дәлелденді. Сондықтан, функция $[a, b]$ кесіндісінде тұрақты болмасын дейік. $[a, b]$ кесіндіде үзіліссіз функция Вейерштрассстың екінші теоремасы бойынша өзінің ең үлкен және ең кіші мәніне осы кесіндінің қайсібір нүктелерінде жетеді. Функция кесіндіде үзіліссіз болғандықтан оның максимум немесе минимум болатын нүктесі осы кесіндінің ішкі нүктесінде жатады. Бұл екі нүкте $[a, b]$ кесіндінің шеткі нүктелері болуы мүмкін емес. Себебі олар шеткі нүктелер болса $\max_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(a) = f(b)$ болады, теореманың шарты бойынша, $f(x) = C = \text{const}$ болады, олай болуы мүмкін емес. Сондықтан x_1 және x_2 (максимум және минимум) нүктелердің біреуі міндетті түрде (a, b) интервалында жатады. Ол нүктені ξ деп белгілейік. Осы нүктеде функцияның төңіректік экстремумы бар. Теореманың шарты бойынша $f'(\xi)$ бар. Ферма теоремасы бойынша бұл туынды нөлге тең, яғни $f'(\xi) = 0$. Теорема дәлелденді. Теоремадағы үш шарттардың ең кем дегенде біреуі орындалмаса, теорема тұжырымы орындалмайды.

1-мысал. $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ функциясын қарастырайық (59-сурет). $f(-1) = f(1)$. Шеткі нүктелерде функцияның мәндері тең, бірақ $f'(\xi) = 0$ болатын нүкте жоқ ($\xi \in (-1, 1)$), себебі $x = 0$ нүктеде функцияның туындысы жоқ.

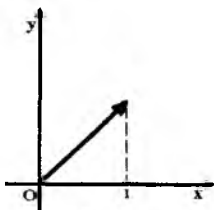


59-сурет

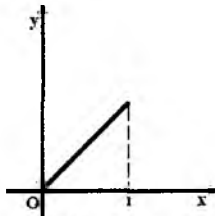
2-мысал. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ функциясын қарастырайық (60-сурет). $f'(\xi) = 0$

болатын нүкте жоқ, себебі функция $x = 1$ нүктеде үзілісті.

3-мысал. $f(x) = x, x \in [0, 1]$ функциясын қарастырайық (61-сурет). Бұл функцияның да $[0, 1]$ кесіндіде $f'(\xi) = 0$ болатын нүктесі жоқ, себебі кесіндінің шеткі нүктелерінде функцияның мәндері тең емес, яғни $f(0) \neq f(1)$.



60-сурет



61-сурет

3. Коши теоремасы. f және g функциялары 1) $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз; 2) (a, b) интервалдың әрбір нүктесінде туындылары бар; 3) (a, b) интервалдың барлық нүктелерінде $g'(x) \neq 0$ болса, онда $\xi \in (a, b)$ нүктесі табылып

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (a, b) \quad (29.5)$$

теңдік орындалады.

Дәлелдеуі. $g(a) \neq g(b)$ болсын, егер олар тең болса ең кем дегенде бір $\xi \in (a, b)$ нүктесі табылып $g'(\xi) = 0$ болған болар еді, теореманың шарты бойынша олай болуы мүмкін емес. Енді қосымша

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x) \quad (29.6)$$

функциясын қарастырайық. Белгісіз λ параметрді $F(a) = F(b)$ болатындай етіп, таңдап аламыз, яғни

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \Rightarrow \lambda[g(b) - g(a)] = f(b) - f(a) \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (29.7)$$

Енді F функциясы Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады, сондықтан $\xi \in (a, b)$ нүктесі табылып $F'(\xi) = 0$ болады. Осы шарттан

$$F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x) \Rightarrow f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (29.8)$$

(29.7) және (29.8) теңдіктердің сол жақтары тең, олай болса олардың оң жақтары да тең $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ болады.

ЕСКЕРТУ. (29.5) формула $a < b$ және $a > b$ үшін де дұрыс.

4. Лагранж теоремасы. (*Орта мән туралы теорема*). $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз және (a, b) интервалдың әрбір нүктесінде туындысы болса, онда осы интервалдан ең кемінде бір ξ нүктесі табылып, мына теңдік орындалады

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (29.9)$$

Дәлелдеуі. Қосымша $F(x) = f(x) - \lambda x$ функциясын қарастырамыз. Мұндағы λ параметрін $F(a) = F(b)$ болатындай етіп таңдап аламыз, яғни

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \Rightarrow \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (29.10)$$

$F(x)$ функциясы Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады, сондықтан $\xi \in (a, b)$ нүктесі табылып $F'(\xi) = 0$ болады. Осы шарттан

$$f'(\xi) - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = f'(\xi) \quad (29.11)$$

(29.10) және (29.11) теңдіктердің сол жақтары тең, олай болса

$$f(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(b) - f(a) = f(\xi)(b - a).$$

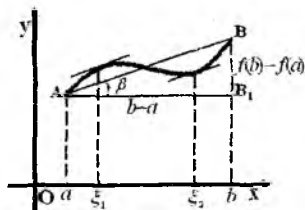
Теорема дәлелденді. Бұл теорема Коши теоремасының $g(x) = x$ болғандағы дербес түрі.

Лагранж теоремасының геометриялық мағынасы. $f(x)$ функциясының графигінің $A(a, f(a))$ және $B(b, f(b))$ нүктелері арқылы AB хордасын жүргізейік (62-сурет). Онда $\triangle ABB_1$ үшбұрыштан

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \beta. \quad (29.12)$$

Ал $f'(\xi)$ туынды $(\xi, f(\xi))$ нүктеден графикке жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті, яғни $f'(\xi) = \operatorname{tg} \alpha$. Онда (29.12) теңдікті былай жазуға болады $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.

Сонымен (a, b) интервалынан бір ξ нүктесі табылып, сол нүктеден графикке жүргізілген жанама AB хордаға параллель болады. Ал берілген графикке абсциссасы ξ_1 және ξ_2 болатын екі нүктеден жүргізілген жанама AB -ға параллель.



62-сурет

§30. Лопиталь ережесі

$\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(x - \infty)$, (∞^0) , (1^∞) , (0^0) түріндегі анықталмағандықтарды есептеуге Лопиталь ережесі жиі қолданылады.

1-теорема. f және g функциялары x_0 нүктенің кейбір аймағында, мүмкін x_0 нүктеден басқа барлық нүктелерінде, үзіліссіз және олардың туындылары бар болсын. Осы көрсетілген аймақта $g(x) \neq 0$ және $g'(x) \neq 0$ болып,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad (30.1)$$

теңдіктері орындалсын. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ бар болса, онда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ бар болады және мына теңдік орындалады

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (30.2)$$

Дәлелдеуі. f және g функциялары x_0 нүктесінде $f(x_0) = g(x_0) = 0$ болсын деп анықтайық. Онда олар x_0 нүктесінде де үзіліссіз болады да $[x_0, x]$ кесіндіде Коши теоремасының шарттарын қанағаттандырады, яғни

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad x_0 < \xi < x.$$

Егерде $x \rightarrow x_0$, онда $\xi \rightarrow x_0$ ұмтылады, олай болса

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1 - ЕСКЕРТУ. Лопиталь ережесіндегі (30.2) теңдіктегі $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ шектің бар болуы қажетті.

Мысал. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = 0$. Енді осыған Лопиталь ережесін қолданайық.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^2 \cos \frac{1}{x}\right)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}.$$

Бірақ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ шегі жоқ.

2 - ЕСКЕРТУ. Егер (2.2) теңдіктің оң жағындағы $\frac{f(x)}{g'(x)}$ қатынас $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ түріндегі анықталмаған болса және $f'(x)$, $g''(x)$ функциялары 1-ші теореманың шарттарын қанағаттандырса, онда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g'''(x)}.$$

Мысал. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$

2-теорема. f және g функциялары x_0 кейбір аймағында үзіліссіз және туындылары бар болсын және

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Осы аймақта $g'(x)$ нөлге тең болмасын, яғни $g'(x) \neq 0$, $g''(x) \neq 0$.

Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ бар болса, онда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ бар болады және мына теңдік орындалады

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Дәлелдемейміз).

3 - ЕСКЕРТУ. 1. $(0 \cdot \infty)$ түріндегі анықталмағанды әрқашанда $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ немесе $\begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix}$ түріндегі анықталмағандарға келтіруге болады, яғни оған да

Лопиталь ережесін қолдануға болады. Егер $x \rightarrow x_0$ ұмтылғанда $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow \infty$ ұмтылсын, онда

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ немесе } f(x)g(x) = \frac{g}{\frac{1}{f}} = \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix}.$$

$$2. x \rightarrow x_0, f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0, f^g = e^{g \ln f} \rightarrow e^{(0 \cdot \infty)}$$

$$3. x \rightarrow x_0, f(x) \rightarrow 1, g(x) \rightarrow \infty, f^g = e^{g \ln f} \rightarrow e^{(0 \cdot \infty)}$$

$$4. x \rightarrow x_0, f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow 0, f^g = e^{g \ln f} \rightarrow e^{(0 \cdot \infty)}$$

$$5. x \rightarrow x_0, f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty, f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}} \rightarrow \left(\frac{0}{0}\right).$$

$$\text{Мысал. } 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} = 0, \quad \forall \alpha > 0.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{a^x} = 0, \quad \forall a > 0, \quad a > 1.$$

§31. Тейлор формуласы

Егер $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде туындысы болса, онда оның өсімшесін мына түрде жазуға болады

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

мұндағы $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$, $A = f'(x_0)$ яғни

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (31.1)$$

Егер $P_1(x)$ деп мынандай сызықты функцияны белгілесек:

$$P_1(x) = f(x_0) + A(x - x_0) \quad (31.2)$$

$$f(x) = P_1(x) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0 \text{ онда} \quad (31.3)$$

$$P_1(x_0) = f(x_0), \quad P_1'(x_0) = A = f'(x_0). \quad (31.4)$$

x_0 нүктеде $f(x)$ функцияның n -ші ретті туындысы болсын, онда осы функцияны

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \quad (31.5)$$

түрде жазуға бола ма? Мұндағы $P_n(x)$ белгісіз n -ші дәрежелі көпмүшелік және ол мына шарттарды қанағаттандыратын болсын

$$f(x_0) = P_n(x_0), \quad f'(x_0) = P_n'(x_0), \quad f''(x_0) = P_n''(x_0), \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) \quad (31.6)$$

Бұл белгісіз көпмүшелікті мына түрде іздейміз

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n \quad (31.7)$$

Белгісіз $A_0, A_1, \dots, A_n$ коэффициенттерді (31.6) шарттардан табамыз:

$$f(x_0) = P(x_0) = A_0 \Rightarrow A_0 = f(x_0)$$

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3A_3(x - x_0)^2 + \dots + nA_n(x - x_0)^{n-1} \Rightarrow P_n'(x_0) = A_1, \quad A_1 = f'(x_0)$$

$$P_n''(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}. \text{ Осыдан}$$

$P_n''(x_0) = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2!} = \frac{f''(x_0)}{2!}$. Осы процесстерді жалғастырып

$$P_n^{(n)}(x) = n!A_n, \quad P_n^{(n)}(x_0) = n!A_n \Rightarrow A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

$A_0, A_1, \dots, A_n$ коэффициенттердің мәндерін (31.7) формулаға қойсақ, мынандай көпмүшелік аламыз

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (31.8)$$

(31.8) көпмүшелік $f(x)$ функцияның Тейлор көпмүшелігі деп аталады. Енді осы көпмүшеліктің (31.5) шартты қанағаттандыратындығын көрсетейік, ол үшін

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad (31.9)$$

деп белгілейік. $r_n(x)$ функциясы x_0 нүктенің кейбір маңайында $f(x)$ функциясын $P_n(x)$ көпмүшелікке алмастырғандағы қателік деп аталынады. (31.6) шарттардан

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \quad (31.10)$$

Енді $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ $x \rightarrow x_0$ немесе $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ екендігін көрсетейік.

Ол үшін $\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n}$ анықталмағандыққа n рет Лопиталь ережесін қолданамыз.

Онда мынаны аламыз

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Сондықтан $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$, $x \rightarrow x_0$. Сонымен мынандай теорема дәлелденді.

Теорема. Егер f функциясы x_0 нүктенің кейбір аймағында анықталса және осы нүктеде n -ретті туындысы болса, онда $x \rightarrow x_0$ ұмтылғанда мына формула орындалады:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

немесе $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, $0! = 1$. (31.11)

(31.11) формула, қалдығы Пеано түріндегі, n -ші ретті Тейлор формуласы деп аталынады. Мұндағы $r_n(x) = f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$ $x \rightarrow x_0$ - Пеано қалдық мүшесі.

$\Delta x = x - x_0$, $x = x_0 + \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ деп белгілесек, онда (31.11) формуланы мына түрде жазуға болады

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + i(\Delta x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\Delta x^k + i(\Delta x^n). \quad (31.12)$$

Егер $x_0 = 0$ болса, онда Тейлор формуласын *Маклорен формуласы* деп атайды, яғни

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \quad (31.13)$$

§32. Тейлор формуласындағы Лагранж қалдық мүшесі

$f(x)$ функциясының x_0 нүктенің кейбір маңайында $n+1$ -ші ретті үзіліссіз туындысы болсын. $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$ деген жаңа функция енгізейік.

$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$, ал $g^{(n+1)}(x) = (n+1)! \neq 0$ екендігі анық.

$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ және $g(x)$ функцияларына Коши теоремасын қолданаық. Онда (31.10) шарттарды қолданып мынаны аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{r_n(x)}{g(x)} &= \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{r'_n(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{r'_n(x_1) - r'_n(x_0)}{g'(x_1) - g'(x_0)} = \frac{r''_n(x_2)}{g''(x_2)} = \dots = \frac{r_n^{(n)}(x_n)}{g^{(n)}(x_n)} = \\ &= \frac{r_n^{(n)}(x_n) - r_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_n) - g^{(n)}(x_0)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}, \end{aligned}$$

мұндағы $x_1 \in (x_0, x)$, $x_2 \in (x_0, x_1)$, ..., $x_n \in (x_0, x_{n-1})$, $\xi \in (x_0, x_n) \subset (x_0, x)$

$g^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$, $r_n^{(n+1)} = f^{(n+1)}(\xi) - 0 = f^{(n+1)}(\xi)$ болғандықтан

$$\frac{r_n(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Rightarrow r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} g(x) \text{ немесе}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad x_0 < \xi < x. \quad (32.1)$$

(32.1) функция Тейлор формуласының Лагранж түріндегі қалдық мүшесі деп аталынады. ξ нүктесін мына түрде де жазуға болады

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1. \quad (32.2)$$

Сонымен Тейлор формуласын былай жазуға болады

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ &+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned} \quad (32.3)$$

Егер $f^{(n+1)}(x)$ функциясы x_0 нүктеде үзіліссіз болса, онда x_0 нүктенің кейбір маңайы табылып, $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ кесіндіде бұл функция үзіліссіз болады. Олай болса осы кесіндіде $f^{(n+1)}(x)$ функция шенелген, яғни

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

$$\text{Сонымен } |r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M_n}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}. \quad (32.4)$$

Бұл (32.4) теңсіздікпен $n \rightarrow \infty$ ұмтылғанда $r_n(x)$ функциясын бағалауға болады.

§33. Негізгі элементар функцияларды Тейлор (Маклорен) формуласы арқылы жіктеу

1. $f(x) = \sin x$ функциясын Тейлор формуласы арқылы жіктеу жолын көрсетейік. Бұл функцияның m -ші ретті туындысы бар, яғни

$$f^{(m)}(x) \Big|_{x=0} = (\sin x)^{(m)} \Big|_{x=0} = \sin \left(x + m \cdot \frac{\pi}{2} \right) \Big|_{x=0} = \sin \left(m \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} 0, & \text{егер } m = 2k \\ (-1)^k, & \text{егер } m = 2k+1. \end{cases}$$

$$\text{Сонымен } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad x \rightarrow 0.$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad (33.1)$$

2. $f(x) = \cos x$, $f^{(m)}(x) \Big|_{x=0} = (\cos x)^{(m)} \Big|_{x=0} = \cos \left(m \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} 0, & \text{егер } m = 2k+1 \\ (-1)^k, & \text{егер } m = 2k. \end{cases}$

$$\text{Сонымен } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad 0! = 1. \quad (33.2)$$

3. $f(x) = e^x$, $f^{(m)}(x) \Big|_{x=0} = (e^x)^{(m)} \Big|_{x=0} = e^x \Big|_{x=0} = 1.$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad (33.3)$$

4. $f(x) = e^{-x}$, $f^{(m)}(x) \Big|_{x=0} = (e^{-x})^{(m)} \Big|_{x=0} = (-1)^m e^{-x} \Big|_{x=0} = (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{егер } m = 2k \\ -1 & \text{егер } m = 2k+1. \end{cases}$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad (33.4)$$

5. $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ болғандықтан (33.3) пен (33.4) мүшелеп алып 2-ге бөлеміз, сонымен

$$\sinh x = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad (33.5)$$

6. $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ болғандықтан (33.3) пен (33.4) мүшелеп қосып 2-ге бөлеміз, сонымен

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad (33.6)$$

$$7. f(x) = (1+x)^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Егер α натурал сан болса, онда бұл функцияның жіктелуінен Ньютон биномының формуласын аламыз. Қалдық мүше нөл болады. Сонымен α кез келген нақты сан болсын.

$$f^{(m)}(x) \Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m} \Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)$$

Олай болса

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n+1)!}x^{n+1} + o(x^n)$$

$$x \rightarrow 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (33.7)$$

$$8. f(x) = \ln(1+x) \quad f(0) = 0, \quad f'(x) \Big|_{x=0} = \frac{1}{1+x} \Big|_{x=0} = 1, \quad f''(x) \Big|_{x=0} = \frac{1}{(1+x)^2} \Big|_{x=0} = -1,$$

$$f'''(x) \Big|_{x=0} = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} \Big|_{x=0} = 2!, \quad f^{(4)}(0) = -3!, \dots, \quad f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1}(m-1)!. \quad (33.8)$$

Сондықтан

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n). \quad (33.9)$$

§34. Шектерді Тейлор формуласы арқылы есептеу

1. $\left(\frac{0}{0}\right)$ түрдегі анықталмағанды қарастырайық.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) \text{ мұндағы } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

f және g функцияларын x_0 нүктенің аймағында Тейлор формуласы бойынша жіктейміз, олардың нөл емес тек бірінші мүшесін аламыз, яғни

$$f(x) = a(x-x_0)^r + o((x-x_0)^r) \quad a \neq 0.$$

$$g(x) = b(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m) \quad b \neq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x-x_0)^r + o((x-x_0)^r)}{b(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^{r-m} = \begin{cases} 0, & n > m \\ \frac{a}{b}, & n = m \\ \infty, & n < m. \end{cases}$$

Көпшілік жағдайда элементар функциялардың дайын жіктеулерін пайдаланады. Сондықтан, егер $x_0 \neq 0$ болмаса, онда $t = x - x_0$ деген алмастыру жасалынады. Бұл жағдайда $x \rightarrow x_0$ ұмтылса $t \rightarrow 0$ ұмтылады.

Егер $x \rightarrow \infty$ ұмтылса, онда $t = \frac{1}{x}$ алмастыру керек, онда $t \rightarrow 0$.

2. Егер $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ түрдегі анықталмағандық болса, оны $\left(\frac{0}{0}\right)$ түрдегі анықталмағанға

келтіруге болады. Сонымен барлық $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 анықталмаған-

дықтарды да $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ анықталмағанға келтіруге болады.

1-мысал.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 2x}{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^3}} = 2.$$

2-мысал.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right]^2 - x^2}{x^2 \left[x + o(x^2) \right]^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2 \left[x^2 + o(x^3) \right]} = -\frac{1}{3}.$$

3-мысал.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = (1^0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{\sin x}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \ln \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x + o(x^2)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + o(x^2))}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0. \quad \text{Сондықтан} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

§35. Дифференциалданатын функциялардың тұрақтылығы, өсуі және кемуі

1-теорема. (Функцияның тұрақтылығының критерийі)

$f(x)$ функциясы:

- 1) берілген кейбір ақырлы немесе ақырсыз аралықта анықталсын;
- 2) осы аралықтың барлық ішкі нүктелеріндегі туындысы нөл болсын;
- 3) осы аралықтың соңғы нүктелерінде үзіліссіз болсын.

Онда $f(x)$ функциясы осы аралықта тұрақты.

Дәлелдеуі. $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ жатсын, онда $[x_1, x_2]$ кесіндіде Лагранж теоремасының шарттары орындалады, яғни

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad f'(\xi) = 0, \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Олай болса $\forall x_1, x_2$ нүктелері үшін $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x) = \text{const}$.

2-теорема. (Функцияның өсуінің критерийі).

$[a, b]$ кесіндіде ($a < b$) $f(x)$ функциясы үзіліссіз және (a, b) аралығында

туындылары теріс емес (он) болсын, онда функция бұл кесіндіде кемімейді (өседі).

Дәлелдеуі. $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ болсын, онда $[x_1, x_2]$ кесіндіде Лагранж теоремасының шарттары орындалады. Сондықтан

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \xi \in (x_1, x_2) \quad (35.1)$$

теңдігі дұрыс. (a, b) аралығында $f'(x) \geq 0$ болғандықтан, $f'(\xi) \geq 0$ болады, онда (35.1) теңдіктен $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Сонымен кез келген $x_2 > x_1$ үшін $f(x_2) \geq f(x_1)$ яғни функция кемімейді. Егер (a, b) аралығында $f'(x) > 0$ болса, онда $f'(\xi) > 0$ болады, онда $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Яғни кез келген $x_2 > x_1$ үшін $f(x_2) > f(x_1)$ онда функция $[a, b]$ кесіндіде өседі.

3-теорема. (Функцияның кемуінің критеріі).

Егер $[a, b]$ кесіндіде $f(x)$ функциясы үзіліссіз және (a, b) -да $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) болса, онда $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндіде өспейді (кемиді).

Бұл теореманың дәлелденуі 2-теореманың дәлелденуіндей.

4-теорема. Егер $[a, b]$ кесіндіде $f(x)$ функциясы жұп (так) және дифференциалданатын болса, онда оның туындысы $f'(x)$ осы кесіндіде так (жұп) болады.

§36. Функцияның төңіректік экстремумының қажетті және жеткілікті шарттары

Алдыңғы параграфта төңіректік экстремумның анықтамасын бергенбіз, енді оған басқаша анықтама берейік.

Анықтама. Егер δ оң саны табылып, функцияның өсімшесі мына теңсіздікті $\Delta y = f(x) - f(x_0) \leq 0, \forall x \in U(x_0, \delta)$ (немесе $\Delta y = f(x) - f(x_0) \geq 0, \forall x \in U(x_0, \delta)$) қанағаттандырса, онда x_0 $f(x)$ функцияның төңіректік максимум (минимум) нүктесі дейді. Төңіректік максимум және минимум нүктелері *төңіректік экстремум нүктелері* деп аталынады.

1. Экстремумның қажетті шарты.

Егер x_0 нүктесі $f(x)$ функцияның төңіректік экстремум нүктесі болса, онда Ферма теоремасы бойынша оның осы нүктедегі туындысы нөлге тең, яғни $f'(x) = 0$. Функцияның туындысы нөл болатын нүктелерді *стационар нүктелер* деп атайды.

(a, b) интервалында $f(x)$ функцияның төңіректік экстремум нүктелерін табу үшін; оларды стационар нүктелердің арасынан немесе $f(x)$ функцияның туындысы болмайтын нүктелердің арасынан іздеу керек. Сонымен стационар нүктелер

$$f'(x) = 0 \quad (36.1)$$

теңдеудің шешімі болады. (36.1) шарт x нүктесі $f(x)$ функцияның төңіректік экстремум нүктесі болу үшін қажетті бірақ жеткіліксіз.

Мысал. $f(x) = x^3$ функциясы $x_0 = 0$ нүктесі стационар нүкте, бірақ бұл нүктеде функция өседі.

2. Төңіректік экстремумның жеткілікті критерилері.

1-теорема. x_0 нүктесі $y = f(x)$ функцияның стационар нүктесі болсын (яғни $f'(x_0) = 0$) және $f(x)$ функцияның x_0 нүктенің кейбір маңайында үзіліссіз екінші ретті туындысы болсын

1) егер $f''(x_0) < 0$ болса, онда x_0 нүктесі төңіректік максимум нүктесі болады;

2) егер $f''(x_0) > 0$ болса, онда x_0 нүктесі төңіректік минимум нүктесі болады.

Дәлелдеуі. f функциясын Тейлор формуласы бойынша $x - x_0$ -тің дәрежелері арқылы жіктеуге болады, $n = 1$ үшін

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \quad \xi \in (x_0, x)$$

x_0 нүктесі стационар нүкте болғандықтан

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \quad \xi \in (x_0, x) \quad (36.2)$$

$f''(x_0) < 0$ болсын, теореманың шарты бойынша x_0 -ің маңайында $f''(x)$ үзіліссіз, сондықтан $f''(x_0) < 0$, $\forall x \in U(x_0, \delta)$ болатын $\delta > 0$ табылады. Онда (36.2) формуланың қалдық мүшесі

$$\frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \leq 0, \quad \forall \xi \in U(x_0, \delta). \Rightarrow \Delta y = f(x) - f(x_0) \leq 0, \quad \forall x \in U(x_0, \delta).$$

Анықтама бойынша x_0 нүктесі $f(x)$ функцияның төңіректік максимум нүктесі болады. Осы сияқты, егер $f''(x_0) > 0$ болса, онда $f''(x_0) > 0$, $\forall x \in U(x_0, \delta)$ және $f''(\xi) > 0$, $\xi \in (x_0, x)$ Сондықтан (36.2) бойынша $\Delta y = f(x) - f(x_0) \geq 0$, яғни x_0 нүктесі f функциясының төңіректік минимум нүктесі болады.

Мысал. $f(x) = 2 + 2x - x^2$ функцияның төңіректің экстремум нүктесін табу керек.

Шешімі. $f'(x) = 2 - 2x$, $2 - 2x = 0$. $x_0 = 1$ стационар нүкте. $f''(x) = -2 < 0$. $f(x)$ функциясы үшін $x_0 = 1$ нүкте төңіректің максимум нүкте болады.

Е С К Е Р Т У. Егер $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ болса, онда f функцияның x_0 нүктеде төңіректік экстремумы болуы да болмауы да мүмкін. Мысалы, $f(x) = x^3$ функцияның $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ бірақ $x_0 = 0$ нүктеде функцияның төңіректік экстремумы жоқ. $f(x) = x^4$ функцияның да $f'(0) = f''(0) = 0$. $x_0 = 0$ нүктесі функцияның төңіректік минимум нүктесі болады.

2-теорема. $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ және $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ туынды x_0 нүктенің кейбір маңайында үзіліссіз болсын.

- 1) егер $(n+1)$ жұп және $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ болса, онда f функцияның x_0 нүктеде төңіректік максимумы болады.
- 2) егер $(n+1)$ жұп және $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ болса, онда f функцияның x_0 нүктеде төңіректік минимумы болады.
- 3) егер $(n+1)$ тақ және $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ болмаса, онда f функцияның x_0 нүктеде төңіректік экстремумы болмайды.

Дәлелдеуі. f функциясын Тейлор формуласымен жіктейік

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$\xi \in (x_0, x)$$

$$f(x) = f(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0 \text{ болғандықтан}$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \xi \in (x_0, x) \quad (36.3)$$

- 1) $n+1$ - жұп және $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ болсын, онда $f^{(n+1)}(x) < 0, \forall x \in U(x_0, \delta)$ және $f^{(n+1)}(\xi) < 0$ себебі $\xi \in U(x_0, \delta)$ Олай болса $f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 0$, онда (36.3) теңдіктен $f(x) - f(x_0) \leq 0, \forall x \in U(x_0, \delta)$ яғни x_0 нүкте анықтама бойынша $f(x)$ функцияның төңіректік максимум нүктесі болады.

- 2) $n+1$ - жұп және $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ болсын, онда $f^{(n+1)}(x) > 0, \forall x \in U(x_0, \delta)$ және $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ себебі $\xi \in U(x_0, \delta)$ Олай болса (36.3) формуладағы қалдық мүше $f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0$, осыдан $f(x) - f(x_0) \geq 0, \forall x \in U(x_0, \delta)$ яғни x_0 нүкте анықтама бойынша $f(x)$ функцияның төңіректік минимум нүктесі болады.

- 3) $n+1$ - тақ болсын, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ болмасын, $f^{(n+1)}(x)$ туындының үзіліссіздігінен x_0 нүктенің кейбір маңайы табылып $f^{(n+1)}(x)$ өзінің таңбасын сақтайды, x нүктесі x_0 нүктесінен өткен кезде (36.3)-тегі $(x-x_0)^{n+1}$ көбейтінді өзінің таңбасын өзгертеді. Сондықтан $\Delta u = f(x) - f(x_0)$ өсімше де өзінің таңбасын өзгертеді. Олай болса x_0 нүктесі $f(x)$ функцияның төңіректік экстремум нүктесі болуы мүмкін емес.

3-теорема. $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ кесіндіде $f(x)$ функциясы үзіліссіз болсын және $(x_0 - \delta, x_0)$ және $(x_0, x_0 + \delta)$ интервалдардың әрқайсысында функцияның туындысы $f'(x)$ болсын. Сонымен бірге

$$f'(x) \geq 0 \quad (\leq 0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f'(x) \leq 0 \quad (\geq 0), \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ болсын.}$$

Онда x_0 нүктесі функцияның төңіректік максимум (минимум) нүктесі болады. Бұл теоремада $f(x_0)$ бар болуы міндетті емес.

Дәлелдеуі. f функциясы $[x_0 - \delta, x_0]$ кесінді де үзіліссіз болғандықтан және функцияның өсуінің критерийінен осы кесіндіде f функциясы кемімейді, (өспейді), яғни

$$f(x_0) - f(x) \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0] \quad (36.4)$$

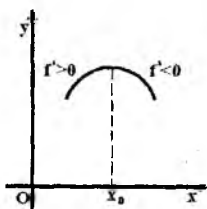
Ал f функцияның $[x_0, x_0 + \delta]$ кесінді де үзіліссіздігінен және функцияның кемуінің критерийінен, осы кесіндіде функция өспейді (кемімейді), сондықтан

$$f(x_0) - f(x) \leq 0 \quad (\geq 0) \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta] \quad (36.5)$$

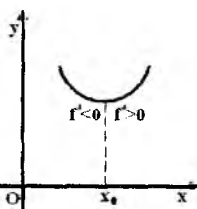
Онда (36.4) және (36.5) теңсіздіктерден

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

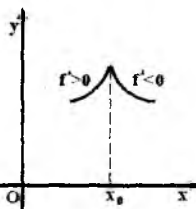
1-мысал.



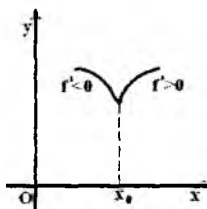
63-сурет



64-сурет



65-сурет



66-сурет

63-суреттегі x_0 нүкте функцияның төңіректік максимум нүктесі, ал 64-суреттегі x_0 нүкте төңіректік минимум, 65-суреттегі x_0 нүкте төңіректік максимум, 66-суреттегі x_0 нүктесі төңіректік минимум нүктесі болады. 65-ші мен 66-ші суреттегі x_0 нүктелерде функцияның туындысы жоқ.

2-мысал. $y = xe^{-x}$ функцияның экстремум нүктелерін табу керек.

Шешімі. $y' = e^{-x} - xe^{-x}$, $e^{-x}(1-x) = 0$, $x_0 = 1$ стационар нүкте.

$$y' = e^{-x}(1-x) \quad 1) y' = e^{-x}(1-x) > 0, \quad \forall x \in (-\infty, 1)$$

$$2) y' = e^{-x}(1-x) < 0, \quad \forall x \in (1, +\infty)$$

Олай болса $x_0 = 1$ нүкте функцияның төңіректік максимум нүктесі болады.

3. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

$[a, b]$ кесіндіде үзіліссіз $f(x)$ функцияның максимум (минимум) болатын нүктелерін табу керек. Бұл функция $x_0 \in [a, b]$ нүктеде өзінің максимумына (минимумына) мына үш жағдайда ғана жетеді:

$$1) x_0 = a, \quad 2) x_0 = b, \quad 3) x_0 \in (a, b)$$

Егер $x_0 \in (a, b)$ болса, онда x_0 төңіректік экстремум нүктесі болады, оны стационар нүктелердің ішінен немесе туындысы болмайтын нүктелердің ішінен іздеу керек. Бұл нүктелер $x_1, x_2, \dots, x_m$ ақырлы жиын құрсын, онда

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = \max \{f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(b)\}$$

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = \min \{f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(b)\}$$

Мысал. $f(x) = \sin x + \cos x$, функцияның $[0, \pi]$ кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Шешімі. $f'(x) = \cos x - \sin x = 0$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - x = k\pi$,

$$x = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Егер $k=0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$ нүктеде $[0, \pi]$ кесіндіде жатады, ал қалған нүктелер бұл кесіндіде жатпайды. Сонымен $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \quad f(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1. \quad f(\pi) = \sin \pi + \cos \pi = -1.$$

$$\max f(x) = \sqrt{2}, \quad \min f(x) = -1.$$

§37. Функцияның дөңестігі және ойыстығы. Иілу нүктелері.

1-анықтама. x_0 нүктеде $y = f(x)$ қисықты дөңес (ойыс) дейміз, егер x_0 нүктенің қайсібір төңірегі табылып, осы төңіректің барлық нүктелерінде $(x_0, f(x_0))$ нүктеден қисыққа жүргізілген жанама осы қисықтан жоғары (төмен) орналасқан болса.

2-анықтама. $(x_0, f(x_0))$ нүктесі $y = f(x)$ қисықтың иілу нүктесі деп аталады, егер $x = x_0$ арқылы өткенде қисықтың нүктелері $(x_0, f(x_0))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың бір жағынан екінші жағына өтсе.

Бұл анықтаманы басқаша былай беруге болады $y = f(x)$ қисықтың иілу нүктесі деп қисықтың дөңестен ойысқа (немесе ойыстан дөңеске) ауысатын $(x_0, f(x_0))$ нүктесін айтады.

67-суретте $y = f(x)$ функция $(x_1, f(x_1))$ нүктеде ойыс $(x_3, f(x_3))$ нүктеде дөңес, ал $(x_2, f(x_2))$ нүктесі бұл функцияның иілу нүктесі.

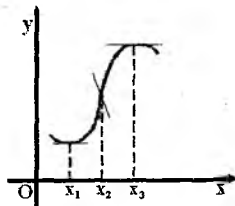
1-теорема. (Функцияның дөңестігінің критерийі).

Егер $f(x)$ функцияның x_0 нүктедегі екінші рет-ті үзіліссіз туындысы болса және $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) болса, онда бұл қисық $(x_0, f(x_0))$ нүктеде ойыс (дөңес) болады.

Дәлелдеуі. $f(x)$ функциясын x_0 нүктенің қайсібір төңірегінде Тейлор формуласы арқылы жіктейміз, $n=1$ үшін

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \quad x_0 < \xi < x. \quad (37.1)$$

$(x_0, f(x_0))$ нүктеде қисыққа жанама жүргіземіз



67-сурет

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (37.2)$$

(37.1)-ден (37.2) алсақ

$$f(x) - Y = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2. \quad (37.3)$$

Егер $f''(x_0) > 0$ болса, онда $f''(x)$ үзіліссіздігінен $f''(x) > 0$, $\forall x \in U(x_0, \delta)$, $\xi \in U(x_0, \delta)$ жатса, онда $f''(\xi) > 0$. Онда (37.3) теңдіктен $f(x) - Y \geq 0$, $\forall x \in U(x_0, \delta)$. Олай болса 1-анықтама бойынша $(x_0, f(x_0))$ нүктеде $f(x)$ функциясы ойыс болады.

Егер $f''(x_0) < 0$ болса, онда $f(x) - Y \leq 0$, $\forall x \in U(x_0, \delta)$, яғни функцияның графигінің нүктелері $(x_0, f(x_0))$ нүктедегі жанаманың нүктелерінен төмен жатыр. Сондықтан 1-анықтама бойынша $(x_0, f(x_0))$ нүктеде функцияның графигі дөңес.

Салдар. Егер $(x_0, f(x_0))$ нүктесі $y = f(x)$ қисықтың иілу нүктесі болса және x_0 нүктеде функцияның екінші ретті туындысы болса, онда ол туынды нөлге тең, яғни $f''(x_0) = 0$.

2-теорема. Егер f функцияның x_0 нүктедегі үшінші ретті туындысы f''' үзіліссіз болса, ал $f''(x_0) = 0$ және $f'''(x_0) \neq 0$ болмаса, онда $(x_0, f(x_0))$ нүктесі f функциясының иілу нүктесі болады.

Дәлелдеуі. Бұл жағдайда функцияны Тейлор қатарына жіктейміз $n = 2$ үшін

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3 \Rightarrow$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3. \quad (37.4)$$

Ал $(x_0, f(x_0))$ нүктедегі жанаманың теңдеуі

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (37.5)$$

(37.4)-ден (37.5) алсақ

$$f(x) - Y = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3. \quad (37.6)$$

$f'''(x)$ үзіліссіз болғандықтан және $f'''(x_0) \neq 0$ болмағандықтан бұл туынды x_0 нүктенің қайсібір төңірегінде өзінің таңбасын сақтайды, олай болса осы төңіректе $f'''(\xi)$ -де өзінің таңбасын сақтайды. Бірақ x x_0 арқылы өткенде $(x - x_0)^3$ көбейтінді өзінің таңбасын өзгертеді. Олай болса $f(x) - Y$ айырымда өзінің таңбасын өзгертеді. 2-анықтама бойынша $(x_0, f(x_0))$ нүкте қисықтың иілу нүктесі.

3-теорема. (жалпы теорема).

Егер $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ және $f^{(n+1)}(x)$ туынды x_0 нүктеде

үзіліссіз болсын және $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Онда

1) егер $n+1$ - жұп, ал $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ болса, онда f функциясы $(x_0, f(x_0))$ нүктеде дөңес;

- 2) егер $n+1$ - жұп, ал $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ болса, онда f функциясы $(x_0, f(x_0))$ нүктеде ойыс;
 4) егер $n+1$ - тақ, ал $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ болса, онда $(x_0, f(x_0))$ нүктесі функцияның иілу нүктесі.

Дәлелдеуі.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f(x) - Y = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Осы соңғы теңдіктен геореманың дәлелдеуі шығады.

ЕСКЕРТУ. $y = f(x)$ қисығын $[a, b]$ кесіндіде дөңес (ойыс) дейміз, егер ол осы кесіндінің әр нүктесінде дөңес (немесе ойыс) болса.

§38. Функцияның графигінің асимптоталары

Кейбір жағдайда функцияның графигі, $x \rightarrow +\infty$ және $x \rightarrow -\infty$ ұмтылғанда немесе екінші типті үзіліс нүктелердің маңында, қайсібір түзуге ақырсыз жақындай түседі. Осындай түзулерді қисықтың *асимптоталары* деп атайды.

Асимптоталардың үш түрі болады: тік асимптота, горизонталь асимптота және көлбеу асимптота.

1-анықтама. Егер $x \rightarrow x_0$ ұмтылғанда функцияның біржақты шектерінің кем дегенде біреуі шексіздікке ұмтылса, яғни $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \pm\infty$ болса, онда $x = x_0$ түзуі $y = f(x)$ қисығының *тік асимптотасы* деп аталады.

Мысал үшін, $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ функциясын қарастырайық. Бұл қисық $x = -1$ түзуі тік асимптота болады, шынында да $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2+1}{x+1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2+1}{x+1} = -\infty$.

2-анықтама. Егер $x \rightarrow +\infty$ немесе $x \rightarrow -\infty$ ұмтылғанда $f(x)$ функцияның ақырлы шегі бар болса, яғни

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} f(x) = A$$

болса, онда $y = A$ түзуін $f(x)$ функциясының *горизонталь асимптотасы* деп атайды.

Мысал үшін, $y = \frac{x^2+1}{x^3+1}$ функциясын қарастырайық. Бұл функцияның горизонталь асимптотасы $y = 0$ болады. Шынында да $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^3+1} = 0$.

3-анықтама. Егерде $f(x)$ функциясын мына түрде жазуға болатын болса

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0 \quad (38.1)$$

онда $x \rightarrow +\infty (-\infty)$ ұмтылғанда $Y = kx + b$ түзуі $f(x)$ функцияның *көлбеу*

асимптотасы деп аталады.

Теорема. $x \rightarrow \pm\infty$ ұмтылғанда $Y = kx + b$ түзуі $f(x)$ функциясының графигінің көлбеу асимптотасы болу үшін, мына шектердің болуы қажетті және жеткілікті

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx] \quad (38.2)$$

Қажеттілігі. $x \rightarrow \pm\infty$ ұмтылғанда $y = kx + b$ түзуі $f(x)$ функциясының көлбеу асимптотасы болсын, онда (38.1) теңдік орындалады, содан

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k.$$
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [kx + b + \alpha(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [b + \alpha(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} b + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = b.$$

Жеткіліктілігі. (38.2) шектер бар болсын. Онда шектердің қасиеттері бойынша мына шектен $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = b \Rightarrow f(x) - kx = b + \alpha(x)$ осыдан $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, яғни 3-ші анықтама бойынша $Y = kx + b$ түзуі $f(x)$ функциясының көлбеу асимптотасы.

Мысал. $y = \frac{x^2+1}{x-3}$ қисықтың асимптоталарын табу керек.

Шешімі. 1) Қисықтың горизонталь асимптотасы жоқ, себебі $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \infty$.

2) $x=3$ нүктесі қисықтың екінші текті үзіліс нүктесі, яғни

$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x^2+1}{x-3} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x^2+1}{x-3} = -\infty$. Демек $x=3$ нүктесі қисықтың тік асимптотасы болады.

3) Енді функцияның көлбеу асимптотасын (38.2) формулалар арқылы іздейміз.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x(x-3)} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2+1}{x-3} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2+1-x^2+3x}{x-3} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+1}{x-3} = 3.$$

Сонымен $Y=x+3$ түзуі берілген қисықтың көлбеу асимптотасы.

§39. Функцияның графигін салудың жалпы жобасы

Енді $y = f(x)$ функциясын зерттеп графигін тұрғызудың жолын көрсетейік. Берілген функцияны келесі ретпен зерттеу керек:

- 1) функцияның анықталу облысын табу керек;
- 2) функцияның координат өстерімен қиылысу нүктелерін табу керек;
- 3) функцияның тақтылығын, жұптылығын және периодтылығын анықтау керек;
- 4) функцияны бірсарындылыққа және экстремумдыққа зерттеу керек;
- 5) функцияның дөңес, ойыс аралықтарын және иілу нүктелерін табу керек;
- 6) функцияның асимптоталарын табу керек;
- 7) осы мәліметтердің кестесін құру керек;
- 8) алынған мәліметтер арқылы функцияның графигін тұрғызу керек.

Мысал. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ функцияның графигін жоғарыда айтылған жоба

бойынша тұрғызу керек.

Шешімі. 1) Функцияның анықталу облысы $x \neq 1$ басқа барлық нақты сандар жиыны, яғни $x \in R \setminus x=1$.

2) $x^2 - x + 1 = 0$ тендеудің нақты түбірі жоқ, сондықтан функцияның графигі OX өсін қиып өтпейді, ал OY өсін $(0, -1)$ нүктесінде қияды.

3) Берілген функция тақ та, жұп та, периодты да емес.

5) Функцияны бірсарындылыққа және экстремумдыққа зерттеу үшін оның бірінші туындысын есептейміз:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 3x + 1 - x^2 + x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$f'(x) = 0$, $x(x-2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ екі стационарлық нүкте бар.

6) Функцияның дөңес, ойыс аралықтарын және иілу нүктелерін табу үшін функцияның екінші ретгі туындысын есептейміз:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)[(x-1)^2 - (x^2-2x)]}{(x-1)^4} = \frac{2[x^2-2x+1-x^2+2x]}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Ешбір нүктеде $f''(x) \neq 0$ болмағандықтан функцияның иілу нүктесі жоқ.

7) Енді функцияның барлық асимптоталарын табайық. $x=1$ функцияның тік асимптотасы болады, себебі

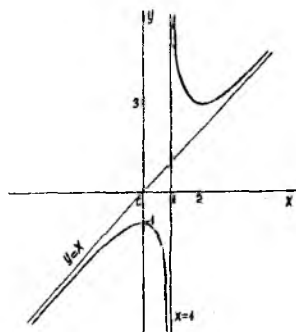
$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\infty$$

болғандықтан функцияның горизонталь асимптотасы жоқ.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1.$$

Сонымен $Y=x$ түзуі функцияның көлбеу асимптотасы. Алынған мәліметтердің кестесін құрамыз (1-кесте).



68-сурет

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	∞	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	∞	$\searrow$	3	$\nearrow$
$f''(x)$	-	-	-	∞	+	+	+
$f(x)$	$\cap$	-1	$\cap$	∞	$\cup$	3	$\cup$

8) Енді функцияның графигін тұрғызайық (68-сурет).

Функцияның графигі $(-\infty, 1)$ аралығында дөңес, ал $(1, +\infty)$ аралығында ойыс.

$x=0$ нүкте функцияның төңіректік максимум, $x=2$ төңіректік минимум нүктесі $f(0)=-1$, $f(2)=3$.

III тарау. Көп айнымалы функциялар.

§1. Көп айнымалы функцияның негізгі ұғымдары

Функцияның анықтамасы. D жиыны R_n кеңістігінің кез келген нүктелер жиыны болсын. Егер D жиынының әрбір $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ нүктесіне қандай да бір ереже бойынша толық анықталған $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нақты сан сәйкес келсе, онда D жиынында $x_1, x_2, \dots, x_n$ n тәуелсіз айнымалылардың $u = f(M)$ функциясы анықталған дейді.

$D(f)$ функцияның анықталу облысы, ал $E(f) = \{u \in R \mid u = f(M), M \in D\}$ функцияның мәндерінің облысы деп аталады.

$n = 2$ дербес жағдайда екі айнымалының функциясы $z = f(x, y)$ тура осылай анықталады. Егер әрбір нүктеге $M(x, y) \in D \subset R_2$ қандайда бір ереже бойынша $f(M) = f(x, y)$ нақты сан сәйкес келсе, онда D жиынында x, y екі айнымалының $z = f(x, y)$ функциясы анықталған дейді.

$E(f) = \{z \in R \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\} - z = f(x, y)$ функцияның мәндерінің облысы.

$n = 3$ дербес жағдайда x, y, z үш айнымалының функциясы $u = f(x, y, z)$ тура осылай анықталады.

Екі айнымалы функцияны график түрде кескіндеуге болады. $z = f(x, y)$ функцияның графигі R_3 кеңістікте бет болады.

Мысал 1. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$ функцияның анықталу облысын табу керек.

Шешімі. $x^2 + y^2 - R^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq R^2$. Сонымен функцияның анықталу облысы центрі бас нүктеде жататын, радиусы R -ге тең дөңгелектің сыртындағы нүктелер жиыны.

Мысал 2. $u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ функцияның анықталу облысын табу керек.

Шешімі. $-1 \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \leq 1, (z > 0) \Rightarrow -z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq z$. Сонымен функцияның анықталу облысы екінші ретті конустың ішінде жатқан нүктелер жиыны болады.

Функцияның нүктедегі шегі

Коши анықтамасы. A саны $u = f(M)$ функцияның $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нүктесінің $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нүктесіне ұмтылғандағы шегі деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ санға $\delta > 0$ саны табылып,

$$0 < \rho(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta \quad (1.1)$$

шартынан

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - A| < \varepsilon \quad (\text{немесе } |f(M) - A| < \varepsilon) \quad (1.2)$$

теңсіздігі орындалатын болса.

Бұл шартты былай да жазуға болады

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \text{ немесе } \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \quad (1.3)$$

Бұл анықтама квантор тілінде былай жазылады

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \left(\forall M \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0) \right): |f(M) - A| < \varepsilon. \quad (1.4)$$

Гейне анықтамасы. Егер шегі M_0 -ге тең кез келген жинақталған $\{M_n\}$ тізбекке, $M_n \neq M_0$, шегі A -ға ұмтылатын функцияның мәндерінің тізбектері $\{f(M_n)\}$ сәйкес келсе, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} f(M_n) = A$, онда A саны $u = f(M)$ функцияның M_0 нүктедегі шегі деп аталады.

Функцияның шегінің қасиеттері

Көп айнымалы функция шегінің кейбір қасиеттерін дәлелсіз келтірейік.

$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$, $\lim_{M \rightarrow M_0} g(M) = B$ болсын, онда

- $\lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) \pm g(M)] = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \pm \lim_{M \rightarrow M_0} g(M) = A \pm B.$
- $\lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) \cdot g(M)] = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \cdot \lim_{M \rightarrow M_0} g(M) = A \cdot B.$
- $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)}{\lim_{M \rightarrow M_0} g(M)} = \frac{A}{B}. \quad (B \neq 0)$
- Егер $u = f(M)$ функцияның M_0 нүктеде шегі бар болса, онда $f(M)$ функциясы шенелген болатын M_0 нүктенің кейбір маңайы табылады.
- $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A > 0$ ($A < 0$) болса, онда M_0 нүктенің кейбір маңайы табылып, осы маңайдың әрбір нүктесінде $f(M) > 0$ (немесе $f(M) < 0$) болады.

§2. Көп айнымалы функцияның үзіліссіздігі

Анықтама. Егер мына үш шарт орындалса:

- $f(M)$ функциясы M_0 нүктеде анықталса,
- $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ шегі бар болса,
- $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ болса, онда $u = f(M)$ функциясын M_0 нүктеде үзіліссіз деп атайды.

Үзіліссіздіктің басқа анықтамасын квантор тілінде былай жазуға болады:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \left(\forall M \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0) \right): |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$$

Егер M_0 нүктеде осы үш шарттардың кем дегенде біреуі орындалмаса, онда M_0 нүктені функцияның үзіліс нүктесі деп атайды. Үзіліс нүктесі жекеленген нүкте болуы, үзіліс қисығын немесе үзіліс бетін құруы мүмкін.

Егер $u = f(M)$ функциясы D облысының әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда бұл функцияны D облысында үзіліссіз деп атайды.

Үзіліссіз функциялардың қасиеттері

Үзіліссіз функциялардың кейбір қасиеттерін дәлелсіз келтірейік.

1. Егер f және g функциялары M_0 нүктеде үзіліссіз болса, онда $f+g$, $f \cdot g$, f/g , $(g(M_0) \neq 0)$ функциялары да M_0 нүктеде үзіліссіз болады.
2. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ күрделі функция болсын, мұндағы
 $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m)$, ..., $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m)$
 Егер $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$, $i = 1, 2, \dots, n$, функциялары $t^0(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0)$ нүктеде үзіліссіз, ал $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы $M_0 = (x_1(t^0), x_2(t^0), \dots, x_n(t^0))$ нүктеде үзіліссіз болса, онда $u = f(x_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_m)) = F(t_1, t_2, \dots, t_m)$ күрделі функциясы t^0 нүктеде үзіліссіз болады.
3. Егер $u = f(M)$ функциясы M_0 нүктеде үзіліссіз болса және $f(M_0) \neq 0$ болмаса, онда $U_0(M_0)$ табылып, осы аймақтың әрбір нүктесіндегі $f(M)$ функцияның таңбасы $f(M_0)$ -нің таңбасына тең болады.
4. Егер $u = f(M)$ функциясы шенелген тұйық $\bar{D}$ жиынында үзіліссіз болса, онда бұл функция осы жиында шенелген және осы жиынның кейбір M_1 және M_2 нүктелерінде өзінің ең үлкен M және ең кіші m мәндерін қабылдайды.

§3. Функцияның дербес және толық өсімшелері. Дербес туындылар.

D облысында анықталған екі айнымалы $z = f(x, y)$ функциясын қарастырайық, x және y айнымалыларға $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$ болатындай Δx және Δy өсімшелерін берейік. Онда $z = f(x, y)$ функциясы M нүктеде *толық өсімше* алады. Ол мынаған тең

$$\Delta z(M) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f(M_1) - f(M)$$

Онда f функцияның M нүктедегі үзіліссіздігін (кос айнымалы бойынша) былай жазуға болады

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z(M) = 0 \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall |\Delta x| < \delta, |\Delta y| < \delta): |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Енді $M(x, y) \in D$, $M_1(x + \Delta x, y) \in D$ болсын, онда $\Delta_x z(M) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ шаманы $z = f(x, y)$ функцияның M нүктедегі x бойынша *дербес өсімшесі* деп атайды.

Ал $M(x, y) \in D$, $M_1(y, y + \Delta y) \in D$ болса, $\Delta_y z(M) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ айырымды $z = f(x, y)$ функцияның M нүктедегі y бойынша *дербес өсімшесі*

деп атайды.

$z = f(x, y)$ функцияның M нүктедегі x және y бойынша үзіліссіздігін былай жазуға болады:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta_x z(M) = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall |\Delta x| < \delta): |f(M_1) - f(M)| < \varepsilon.$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta_y z(M) = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall |\Delta y| < \delta): |f(M_1) - f(M)| < \varepsilon.$$

Функцияның $M(x, y)$ нүктедегі үзіліссіздігінен оның әрбір x және y айнымалылар бойынша үзіліссіздігі шығады. Ал керісінше тұжырым дұрыс емес.

Жоғарғы келтірілген анықтамалар саны кез келген айнымалы функциялар үшін де дұрыс. Мысалы, үш айнымалы $u = f(x, y, z)$ функциясы берілсін, оның дербес өсімшелері

$$\Delta_x u(M) = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$$

$$\Delta_y u(M) = f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)$$

$$\Delta_z u(M) = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

ал толық өсімшесі $\Delta u(M) = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$ айырымға тең.

D жиынында $u = f(x, y, z)$ функциясы берілсін. Егер

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u(M)}{\Delta x}$$

шек бар болса, онда ол шек $u = f(x, y, z)$ функциясының $M(x, y, z)$ нүктедегі x бойынша алынған дербес туындысы деп аталады да, мына өрнектермен белгіленеді

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M, \quad \frac{\partial u(M)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad f'_x(M)$$

$u = f(x, y, z)$ функцияның x бойынша дербес туындысы анықтама бойынша

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = \frac{\partial f(M)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u(M)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

f функцияның M нүктедегі y және z бойынша дербес туындылары да тура осылай анықталады. Сонымен,

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y} = \frac{\partial f(M)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u(M)}{\Delta y}. \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z} = \frac{\partial f(M)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta_z u(M)}{\Delta z}. \quad (3.3)$$

Мысал. $u = 3x^2yz + 4z^2 + \cos(xy)$ функцияның дербес туындыларын табындар.

Шешімі. $\frac{\partial u}{\partial x} = 6xyz - y \sin(xy)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y - x \sin(xy)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2y + 8z$. Мына

ережені есте сақтаған дұрыс, егер функциядан, x бойынша туынды алсақ y пен z -гі тұрақты деп есептеу керек, яғни қайсібір айнымалы бойынша дербес туынды алсақ қалған айнымалыларды тұрақты сан деп есептеу керек.

§4. Көп айнымалы функцияның дифференциалдануы

Анықтама. $u = f(x, y, z)$ функциясын $M(x, y, z)$ нүктеде дифференциалданады дейді, егер осы нүктенің кейбір аймағында осы функцияның толық өсімшесін былай жазуға болса:

$$\Delta u(M) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho) \quad (4.1)$$

мұндағы A, B, C - тұрақтылар, ρ дегеніміз $M(x, y, z)$ және $M(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ нүктелердің ара қашықтығы $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, $o(\rho)$ өрнегі ρ -ға қарағанда жоғарғы ретті аз шама, яғни $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$.

Теорема. (Дифференциалданудың қажетті шарты).

Егер $u = f(x, y, z)$ функциясы $M(x, y, z)$ нүктеде дифференциалданатын болса, онда осы нүктеде функцияның барлық айнымалылары бойынша дербес туындылары бар болады да,

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial z} = C, \quad (4.2)$$

теңдіктері орындалады.

Дәлелдеуі. $u = f(x, y, z)$ функциясы $M(x, y, z)$ нүктеде дифференциалданатын болсын. Онда $M(x + \Delta x, y, z)$ нүктеде (4.1) теңдік бойынша

$$\Delta_x u(M) = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z) = A\Delta x + o(|\Delta x|) \quad (4.3)$$

теңдігі шығады. (4.3) теңдіктің екі жағын $\Delta x \neq 0$ -ке бөліп, $\Delta x \rightarrow 0$, онда дербес туындының анықтамасы бойынша

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A, \\ \frac{\partial f(M)}{\partial x} &= A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\partial f(M)}{\partial x} = A. \end{aligned}$$

Дәл осылай $\frac{\partial f(M)}{\partial y} = B$, $\frac{\partial f(M)}{\partial z} = C$.

Онда толық өсімшені (4.1) былай жазуға болады

$$\Delta u(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(M)}{\partial z} \Delta z + o(\rho) \quad (4.4)$$

Теорема. (Дифференциалданудың жеткілікті шарты).

Егер $u = f(x, y, z)$ функциясының $M(x, y, z)$ нүктеде $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ және $\frac{\partial f}{\partial z}$

үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда M нүктеде функция дифференциалданады.

(Дәлелдемейміз).

n айнымалы функция үшін де дифференциалдану ұғымы осылайша анықталады, яғни $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нүктеде дифференциалданады дейді, егерде оның осы нүктедегі толық өсімшесін былай жазуға болатын болса:

$$\Delta u(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(M)}{\partial y_2} \Delta y_2 + \dots + \frac{\partial f(M)}{\partial x_n} \Delta x_n + o(\rho) \quad (4.5)$$

мұндағы $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}$.

§5. Көп айнымалы функцияның толық дифференциалы

Егер $u = f(x, y, z)$ функциясы $M(x, y, z)$ нүктеде дифференциалданатын болса, онда оның (4.1) толық өсімшесінің Δx , Δy , Δz өсімшелерге байланысты

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(M)}{\partial z} \Delta z$$

сызықты өрнегін f функцияның M нүктедегі *толық дифференциалы* немесе *дифференциалы* деп атайды да $du(M)$ немесе $df(M)$ түрінде белгілейді.

Сонымен анықтама бойынша

$$df(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(M)}{\partial z} \Delta z \quad (5.1)$$

тәуелсіз айнымалылар үшін $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, $\Delta z = dz$ болғандықтан, (5.1) дифференциалды мына түрдеде жазуға болады:

$$df(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(M)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(M)}{\partial z} dz. \quad (5.2)$$

$$\text{Ал, } d_x f(x) = \frac{\partial f(M)}{\partial x} dx, \quad d_y(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial y} dy, \quad d_z(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial z} dz \quad (5.3)$$

өрнектерді функцияның әр айнымалы бойынша сәйкес *дербес дифференциалдары* деп аталады. Онда функцияның толық дифференциалы $df(M) = d_x f(M) + d_y f(M) + d_z f(M)$ түрінде жазылады.

Енді толық өсімшені былай жазуға болады

$$\Delta u(M) = du(M) + o(\rho) \quad (5.4)$$

n айнымалы $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияның $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нүктедегі дифференциалы

$$du(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(M)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(M)}{\partial x_n} dx_n \quad (5.5)$$

түрінде жазылады.

Жуық шамамен

$$\Delta u(M) \approx du(M) \quad (5.6)$$

деп алуға болады. Бұл формуланы функцияның мәнін жуық шамамен есептеуде қолдануға болады. Ол үшін (5.6) формуланы

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \Delta z \quad (5.7)$$

түрінде жазу керек.

Мысал. $\sqrt{(4,02)^2 + (3,04)^2}$ түбірді жуықтап есептеу керек.

Шешімі. Түбірді жуықтап есептеу үшін $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциясын қарастырамыз. Бұл функцияның $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нүктедегі мәнін табамыз. Біздің жағдайда $x_0 = 4$; $y_0 = 3$; $\Delta x = 0,02$; $\Delta y = 0,04$. Онда (5.4) теңдіктегі

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{\substack{x_0=4 \\ y_0=3}} = \frac{4}{5}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{\substack{x=4 \\ y=3}} = \frac{3}{5}, \quad f(x_0, y_0) = 5.$$

$$\sqrt{(4,02)^2 + (3,04)^2} \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y = 5 + \frac{4}{5} \cdot 0,02 + \frac{3}{5} \cdot 0,04 = 5,04.$$

§6. Күрделі функцияның туындысы

1. $u = f(x, y, z)$ үзіліссіз дифференциалданатын функция, ал $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ t бойынша үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болсын. Онда бір t айнымалыға байланысты $u = f(x(t), y(t), z(t)) = F(t)$ күрделі функция анықталған. Егер t -ға өсімше берсек $\Delta t \neq 0$, онда $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$, $\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$ өсімшелер алады. $\Delta t \rightarrow 0$ онда $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$ және $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \rightarrow 0$. $u = f(x, y, z)$ функциясы M нүктеде дифференциалданса оның толық өсімшесін былай жазуға болады

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + o(\rho) \quad (6.1)$$

мұндағы $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$, ал дербес туындылар $(x(t), y(t), z(t))$ нүктеде есептелінген. (6.1) теңдіктің екі жағын Δt -ға бөліп $\Delta t \rightarrow 0$ шекке көшеміз, онда

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial z} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta t}$$

осыдан

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (6.2)$$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta t} = 0$ болатындығын көрсетейік, шынында да

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta t} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = 0.$$

Мысал. $z = x^2 + y^2$, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $\frac{dz}{dt} = ?$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \quad \frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t.$$

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot (-a \sin t) + 2yb \cos t = -2ax \sin t + 2by \cos t.$$

2. Егерде t параметрдің орнына x -ті алатын болсақ, яғни $x=x$, $y=y(x)$, $z=z(x)$ онда (6.2) формуланы былай жазуға болады

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx} \quad (6.3)$$

Мысал. $u = y^{x^2+z^3}$, $x = x$, $y = \cos^2 x$, $z = \sin x$.

Осы функцияның x бойынша дербес туындысын және толық туындысын табу керек.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot \ln y \cdot y^{x^2+z^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 + z^3) y^{x^2+z^3-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 \cdot \ln y \cdot y^{x^2+z^3},$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x, \quad \frac{dz}{dx} = \cos x. \text{ Сонымен}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= 2x \cdot \ln y \cdot y^{x^2+z^3} + (x^2 + z^3) y^{x^2+z^3-1} \cdot (-\sin 2x) + 3z^2 \ln y \cdot y^{x^2+z^3} \cdot \cos x = y^{x^2+z^3} [2x \ln y - \\ &- \frac{1}{y} (x^2 + z^3) \sin 2x + 3z^2 \ln y \cdot \cos x] \end{aligned}$$

3. $u = f(x, y, z)$ үзіліссіз дифференциалданатын функция, ал $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = z(s, t)$ s және t айнымалылар бойынша үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болсын. s, t айнымалылар бойынша $u = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = \Phi(s, t)$ күрделі функция анықталған. Олай болса

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Мысал. $u = x^2 + yz$, $x = \cos(t^2 + s)$, $y = \sin(s \cdot t^2)$, $z = s^2 t^2$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = -\sin(t^2 + s), \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -2t \sin(t^2 + s), \quad \frac{\partial y}{\partial s} = t^2 \cos(s \cdot t^2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 2st \cos(s \cdot t^2), \quad \frac{\partial z}{\partial s} = 2st^2, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 2s^2 t.$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -2x \sin(t^2 + s) + zt^2 \cos(s \cdot t^2) + 2yst^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -4xt \sin(t^2 + s) + 2zst \cos(s \cdot t^2) + 2ys^2 t.$$

4. Егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ болса, ал $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$ болса, онда (6.2)-і былай жазуға болады

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (6.5)$$

Егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ал $x_1 = x_1(t_1, t_2, \dots, t_m)$, ..., $x_n = x_n(t_1, t_2, \dots, t_m)$ болса, онда (6.4) былай жазуға болады

$$\frac{du}{dt_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (6.6)$$

§7. Жоғары ретті дербес туындылар және дифференциалдар

1. $z = f(x, y)$ екі айнымалы функция берілсін. Осы функцияның $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындылары да x және y айнымалылардың функциясы болады. Сондықтан олардан да дербес туынды алуға болады. Сонымен $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$ мұнда функциядан x бойынша екі рет туынды алынды.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$ мұнда f алдымен x бойынша содан соң y бойынша дифференциалданады.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$ мұнда алдымен y бойынша содан соң x бойынша дифференциалданады.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$ мұнда функция y бойынша екі рет дифференциалданады.

Осылайша үшінші ретті туындылар анықталады. n -ші ретті дербес туынды $(n-1)$ -ші ретті туындының бірінші ретті туындысына тең, яғни

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} \right).$$

Мысал. $z = x^3 + y^2 + \sin(xy)$ функцияның екінші ретті барлық дербес туындыларын табу керек.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y \cos(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - y^2 \sin(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(xy) - xy \sin(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x \cos(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 - x^2 \sin(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos(xy) - xy \sin(xy).$$

Теорема. $z = f(x, y)$ функциясы және оның $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ дербес туындылары $M(x, y)$ нүктеде және оның кейбір аймағында анықталған және үзіліссіз болса, онда осы нүктеде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad (f''_{xy} = f''_{yx})$$

тендігі орындалады. (Далелдемейміз).

Бұл теореманың дұрыстығын алдыңғы мысалдан көреміз, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Салдар. Егер $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ және $\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$ дербес туындылар бар үзіліссіз болса, онда $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$ тендігі орындалады.

Жоғары ретті дифференциалдар

$z = f(x, y)$ функцияның үзіліссіз жоғарғы ретті дербес туындылары бар

болсын. Бұл функцияның бірінші ретті толық дифференциалы

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (7.1)$$

теңдігімен анықталады. $z = f(x, y)$ функцияның екінші ретті дифференциалы оның бірінші ретті дифференциалдың дифференциалына тең, яғни

$$d^2 z = d(dz) \quad (7.2)$$

dz функциядан x және y бойынша дербес туынды алған кезде dx және dy тұрақты деп есептейді, яғни

$$\begin{aligned} d^2 z = d(dz) &= \frac{\partial}{\partial x}(dz)dx + \frac{\partial}{\partial y}(dz)dy = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Осылайша

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f(x, y) \quad (7.4)$$

Осы процессті жалғастырып Ньютон биномының формуласын пайдаланып мынаны аламыз:

$$\begin{aligned} d^n z &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x, y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}dx^n + C_n^1 \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + C_n^2 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2 + \dots + \\ &+ \frac{\partial^n f}{\partial y^n}dy^n, \end{aligned} \quad (7.5)$$

мұндағы $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ тереу саны.

Егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ болса, онда жоғарғы ретті n -ші дифференциал

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^n f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}dx_i\right)^n f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7.6)$$

түрінде жазылады.

§8. Көп айнымалы функцияның Тейлор формуласы

Екі айнымалы функцияны қарастырайық. $z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ нүктенің қасібір аймағында n -ші ретті үзіліссіз дербес туындылары болсын. Осы аймақта жататын $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нүктені M_0 нүктемен кесінді арқылы қосайық. Бұл түзудің параметрлік теңдеуі мынандай

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (8.1)$$

Осы түзудің бойында $z = f(x, y)$ функциясы бір тәуелсіз t айнымалының функциясы болады, яғни

$$z = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) = F(t) \quad (8.2)$$

$z = f(x, y)$ функцияның M_0 нүктедегі өсімшесін құрайық

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0) \quad (8.3)$$

$z = f(x, y)$ функцияның M_0 нүктенің қайсібір аймағында n рет үзіліссіз дифференциалданатын болғандықтан $F(t)$ функцияның да $[0, 1]$ кесіндіде n -ші ретті үзіліссіз туындылары болады. Онда $F(t)$ функциясын қалдық мүшесі Лагранж түрде болатын Маклорен формуласы арқылы жіктейік

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{F^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n, \quad 0 < \theta < 1.$$

Осыдан $t = 1$ болғанда мынаны аламыз

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}. \quad (8.4)$$

$F(t)$ функцияның туындыларын $f(x, y)$ функциясы арқылы есептейік. (8.2) өрнектен

$$F'(t) = \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta x)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial y} \Delta y.$$

Осыдан $t = 0$ болғанда

$$F'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y. \quad (8.5)$$

тура осылай

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta x)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \\ + \frac{\partial^2 f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial y^2} \Delta y^2.$$

Осыдан $t = 0$ болғанда

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^2 f(x_0, y_0) = d^2 f(M_0) \quad (8.6)$$

Осы процессті жалғастырып мынаны аламыз:

$$\left. \begin{aligned} F'''(0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^3 f(M_0) = d^3 f(M_0) \\ &\dots \dots \dots \\ F^{(n-1)}(0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n-1} f(M_0) = d^{n-1} f(M_0) \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

$F^{(n)}(\theta t) = d^n f(x_0 + \theta t \Delta x, y_0 + \theta t \Delta y)$ Осыдан $t = 1$ болғанда

$$F^{(n)}(\theta) = d^n f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \quad (8.8)$$

(8.5)-(8.8) теңдіктерді (8.4) теңдікке қойып (8.3) өрнекті ескеріп мынаны аламыз

$$f(M) = f(M_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right) f(M_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^2 f(M_0) + \dots + \\ + \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n-1} f(M_0) + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n \cdot f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y),$$

немесе

$$f(M) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f(M_0) + R_n. \quad (8.9)$$

мұндағы R_n - Лагранж түрдегі қалдық мүше. (8.9) формула $z = f(x, y)$ функцияның M_0 нүктедегі Тейлор формуласы деп аталады. (8.9) формуланы мына түрде де жазуға болады

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f(M_0) + \\ + \frac{1}{n!} d^n f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \quad (8.10)$$

(8.10) теңдік $z = f(x, y)$ функцияның дифференциалдық түрдегі Тейлор формуласы деп аталады.

n айнымалы $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияның $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нүктенің қайсібір аймағында барлық n -ші ретті үзіліссіз дербес туындылары болса, онда оның дифференциалдық түрдегі Тейлор формуласы мына түрде жазылады

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f(M_0) + \\ + \frac{1}{n!} d^n f(x_1^0 + \theta \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \theta \Delta x_n) \quad (8.11)$$

§9. Айқындалмаған функцияның туындылары

Екі айнымалы шама x пен y -тің, мысалы y -тің өзгерісі екіншісінің өзгерісіне тәуелді болса, онда y -ті x -тің функциясы деп атағанбыз. Егер x пен y -тің арасындағы тәуелділік

$$y = f(x) \quad (9.1)$$

формуласымен берілсе, онда y функция айқын түрде, яғни y арқылы шешілген деп аталады.

Ал егер x пен y -тің арасындағы тәуелділік

$$F(x, y) = 0 \quad (9.2)$$

теңдеуі түрінде берілсе, онда y функция айқындалмаған түрде берілген, яғни y арқылы шешілмеген дейді. Айқындалмаған $y = f(x)$ функцияның анықтамасынан

$$F(x, f(x)) \equiv 0 \quad (9.3)$$

тепе-теңдігі шығады.

(9.2) теңдеудегі $F(x, y)$ функциясын екі аргументті функция деп қарастыруға болады. Қандай шарттарды қанағаттандырған кезде, (9.2) теңдеуін у арқылы бір мәнді шешуге болатындығын көрсетейік.

Теорема. $F(x, y)$ функциясы (x_0, y_0) нүктенің қайсібір маңайында үзіліссіз дифференциалданатын болсын. Егер

$$1) F(x_0, y_0) = 0;$$

$$2) \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0, \text{ болса, онда } (x_0, y_0) \text{ нүктенің қайсібір маңайы табылып,}$$

осы маңайда $F(x, y) = 0$ теңдеуін у арқылы бір мәнді шешуге болады, яғни x_0 нүктенің $U_\delta(x_0)$ маңайы табылып $\forall x \in U_\delta(x_0)$ және $y = f(x_0)$ үшін $F(x, f(x)) \equiv 0$ тепе-теңдігін қанағаттандыратын $y = f(x)$ функциясы бар болады. (Дәлелдейміз).

Сонымен (9.2) теңдеу $y = f(x)$ функциясын анықтайтын болса, онда $F(x, y)$ функциясын күрделі функция деп қарастыруға болады. Олай болса $y = f(x)$ функцияның туындысын табу үшін $F(x, f(x)) \equiv 0$ күрделі функциядан x бойынша туынды аламыз:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)y'_x = 0 \quad (9.4)$$

Осыдан $F'_y(x, y) \neq 0$ екенін ескерсек

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (9.5)$$

Егер $F(x, y)$ функцияның үзіліссіз екінші ретті дербес туындылары бар болса, онда (9.5) теңдіктің екі жағынан туынды алып, мына өрнекті аламыз:

$$\begin{aligned} y'' = f''(x) &= -\frac{(F''_{xx} + F''_{xy} \cdot y'_x)F'_y - (F''_{xy} + F''_{yy} \cdot y'_x)F'_x}{(F'_y)^2} = \\ &= \frac{\left[F''_{xy} + F''_{yy} \left(-\frac{F'_x}{F'_y} \right) \right] F'_x - \left[F''_{xx} + F''_{xy} \left(-\frac{F'_x}{F'_y} \right) \right] F'_y}{(F'_y)^2} = \\ &= \frac{2 F''_{xy} F'_x F'_y - F''_{xx} (F'_y)^2 - F''_{yy} (F'_x)^2}{(F'_y)^3}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Дәл осы сияқты $y = f(x)$ функцияның басқа да жоғарғы ретті туындыларын табуға болады.

Мысал 1. $e^y - e^x + xy = 0$ теңдеуімен берілген айқындалмаған $y = f(x)$ функцияның туындысын табу керек.

Шешімі. $F(x, y) = e^y - e^x + xy$ функцияның дербес туындыларын табайық

$$F'_x = -e^x + y, \quad F'_y = e^y + x, \quad (9.5) \text{ формуланы пайдалансақ } \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

$F(x, y, z) = 0$ теңдеуі қайсібір шарттарда $z = f(x, y)$ айқындалмаған функцияны анықтайды. Көп айнымалы айқындалмаған функцияның бар болу теоремасы орындалсын. Онда $z = f(x, y)$ функцияның дербес туындылары мына формулалармен есептелінеді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (9.7)$$

мұндағы $F'_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F'_y = \frac{\partial F}{\partial y}$, $F'_z = \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ -ті іздеген кезде y -ті тұрақты дейміз, сондықтан $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$ тепе-

теңдіктен $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Егер $\frac{\partial z}{\partial y}$ -ті іздесек, онда x -ті тұрақты

дейміз, сондықтан $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Мысал 2. $e^z + x^2y + z + 5 = 0$ теңдеуімен берілген айқындалмаған $z = f(x, y)$ функцияның туындысын табу керек.

Шешімі. $F(x, y, z) = e^z + x^2y + z + 5$ функцияның дербес туындыларын табайық $F'_x = 2xy$, $F'_y = x^2$, $F'_z = e^z + 1$. (9.7) бойынша

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}.$$

Тура осылай көп айнымалы айқындалмаған $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$ теңдеуімен анықталады. Онда анықталмаған көп айнымалы $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияның дербес туындылары мына формулалармен есептелінеді:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial u}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.8)$$

§10. Көп айнымалы функцияның экстремумдары

Айталық, $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы $D \subset R_n$ жиынында анықталсын.

Егерде M_0 нүктенің $U(M_0)$ маңайы табылып, мына шарт орындалса

$$f(M_0) \leq f(M), \quad (f(M_0) \geq f(M)), \quad \forall M \in U(M_0) \quad (10.1)$$

онда f функциясының $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$ нүктеде төңіректік минимумы (максимумы) болады дейді.

Функцияның максимум және минимум нүктелері экстремум нүктелер деп аталады.

Теорема. (Экстремумның қажетті шарттары).

Егер дифференциалданатын $u = f(M)$ функцияның M_0 нүктеде төңіректік экстремумы бар болса, онда осы нүктеде

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} = 0, \quad (10.2)$$

теңдіктері орындалады.

Немесе

$$df(M_0) = 0. \quad (10.3)$$

Дәлелдеуі. Егер M_0 төңіректік экстремум нүктесі болса, онда (10.2) теңдіктердің орындалатындығын көрсетейік. Ол үшін $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ айнымалыларды тұрақты деп алып, яғни $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_{j-1} = x_{j-1}^0, x_{j+1} = x_{j+1}^0, \dots, x_n = x_n^0$ болсын, онда $u = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0)$ функциясы бір айнымалыға x_j -ге тәуелді функция болады. Бұл функцияның $x_j = x_j^0$ нүктеде экстремумы бар, сондықтан бір айнымалы функцияның экстремумының қажетті шарты бойынша

$$\frac{du(M_0)}{dx_j} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_j} = 0.$$

x_j - кез келген айнымалы болғандықтан (10.2) теңдіктер немесе (10.3) орындалады.

Бірінші дербес туындылары нөлге тең нүктелерді *стационарлық* нүктелер деп атайды.

Теорема. (Экстремумның жеткілікті шарттары).

M_0 стационар нүктеде $u = f(M)$ функциясы екі рет үзіліссіз дифференциалданатын болсын. Егер

$$d^2 f(M_0) > 0 \quad (\text{немесе } d^2 f(M_0) < 0) \quad (10.4)$$

болса, онда M_0 нүктеде $f(M)$ функцияның қатаң төңіректік минимумы (немесе қатаң максимумы) болады.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша $u = f(M)$ функцияның M_0 нүктеде үзіліссіз екінші ретке дейінгі дербес туындылары бар. Онда бұл функцияны Тейлор формуласы бойынша былай жіктеуге болады

$$f(M) - f(M_0) = df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_1^0 + \theta \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \theta \Delta x_n) \quad (10.5)$$

мұндағы $0 < \theta < 1$. Ал M_0 нүкте стационар нүкте болғандықтан $df(M_0) = 0$, онда (10.5) формуладан

$$f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2} d^2 f(x_1^0 + \theta \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \theta \Delta x_n) \quad (10.6)$$

f функцияның екінші ретгі дербес туындылары M_0 нүктеде үзіліссіз

болғандықтан, M_0 нүктенің кейбір маңайы табылып, осы $U_\varepsilon(M_0)$ аймақта $d^2f(M)$ және $d^2f(M_0)$ таңбалары бірдей болады. Ендеше $d^2f(M_0) > 0$ ($d^2f(M_0) < 0$) болса, онда $\forall M \in U_\varepsilon(M_0)$ үшін $d^2f(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \dots, x_n^0 + \theta\Delta x_n) > 0$ ($d^2f(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \dots, x_n^0 + \theta\Delta x_n) < 0$). Олай болса (10.6) теңдіктен $f(M) - f(M_0) > 0$ ($f(M) - f(M_0) < 0$) теңсіздігі орындалады да, экстремумның анықтамасы бойынша, M_0 нүктеде функцияның төңіректік минимумы (максимумы) болады. Сонымен

$$1) df(M_0) = 0 \quad 2) d^2f(M_0) > 0 \quad \text{немесе} \quad d^2f(M_0) < 0 \quad (10.7)$$

шарттары $u = f(M)$ функциясының M_0 нүктесіндегі төңіректік минимумы немесе төңіректік максимумы болуының жеткілікті шарттары.

§11. Гессе матрицасы

$z = f(x, y)$ функцияның үзіліссіз екінші ретті дербес туындылары бар болсын. Онда бұл функцияның екінші ретті дифференциалын былай жазуға болады

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \quad (11.1)$$

немесе

$$d^2z = Q(dx, dy) \quad (11.2)$$

мұндағы Q функция dx және dy айнымалылардың квадраттық формасы деп аталады. Онда (11.1) формуланы мына түрде де жазуға болады

$$d^2z = Q(dx, dy) = [dx, dy] \cdot H \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

мұндағы

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

(11.4) матрицасы **Гессе матрицасы** деп аталады.

Тура осылай $u = f(x, y, z)$ үш айнымалы функцияның екінші ретті дифференциалын былай жазуға болады:

$$\begin{aligned} d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \\ + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz = Q(dx, dy, dz) = [dx, dy, dz] \cdot H \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11.5)$$

мұндағы

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

үш айнымалы функцияның Гессе матрицасы.

Тура осылай n айнымалы $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияның екінші ретті дифференциалын мына түрде жазуға болады

$$d^2 u = Q(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = [dx_1, dx_2, \dots, dx_n] \cdot H \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \quad (11.7)$$

мұндағы

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

n айнымалы функцияның Гессе матрицасы.

Егер $d^2 f(M_0)$ квадраттық форманың Гессе матрицасы оң (теріс) анықталса, онда (11.7) теңдіктен $d^2 f(M_0) > 0$ ($d^2 f(M_0) < 0$) болады.

Сильвестрдің критеріі бойынша H Гессе матрицасы сонда тек сонда ғана оң анықталған, егер мына шарттар орындалса:

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} > 0, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} > 0, \dots, \quad (11.9)$$

$$|H|_{M=M_0} > 0$$

теріс анықталған сонда тек сонда ғана, егер

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} < 0, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} < 0, \dots, \\ \dots, (-1)^n |H|_{M=M_0} > 0. \quad (11.10)$$

мұндағы n тәуелсіз айнымалылар саны.

Сонымен $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияның M_0 нүктесінде төңіректің минимум (максимум) болуының жеткілікті шарттарын былай жазуға болады:

$$1) \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} = 0.$$

2) Гессе матрицасы осы M_0 нүктеде оң (теріс) анықталған.

Осы шарттарды екі және үш айнымалы функциялар үшін келтірейік.

$z = f(x, y)$ болсын, онда

$$1) \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0.$$

$$2) \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} > 0, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{M=M_0} > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \quad (11.11)$$

төңіректік минимумның жеткілікті шарттары, ал

$$1) \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0.$$

$$2) \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} < 0, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{M=M_0} > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \quad (11.12)$$

төңіректік максимумның жеткілікті шарттары.

Тура осылай үш айнымалы $u = f(x, y, z)$ функция үшін

$$1) \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = 0.$$

2) H матрицасы M_0 нүктеде оң (теріс) анықталса, онда $u = f(x, y, z)$ функциясының $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде қатаң минимумы (максимумы) болады.

Е С К Е Р Т У. Егер M_0 стационарлық нүктеде $d^2 f(M_0)$ екінші ретті дифференциал таңба бойынша анықталмаса, онда f функцияның M_0 нүктеде төңіректік экстремумы жоқ. Ал екі айнымалы $f(x, y)$ функцияның стационар

M_0 нүктеде төңіректік экстремумы жоқ болса, онда

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 < 0. \quad (11.13)$$

Мысал. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$ функцияның төңіректік экстремумдарын табу керек.

Шешімі. Алдымен стационар нүктелерін табамыз

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + y - 2, & \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{1}{3}, \\ y = \frac{4}{3}. \end{matrix} & M_0\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right). \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x + 2y - 3, \end{aligned}$$

Сонымен стационар нүктенің координаттарын таптық. Енді (11.11)-дегі шарттарды тексеру үшін барлық екінші ретті дербес туындыларды табамыз

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Сонымен (11.11) шарттар орындалды, олай болса бұл функцияның $M_0\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ нүктеде төңіректік минимумы болады. $z_{\min}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} - \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{7}{3}$.

Мысал 2. $u = -x^2 - y^2 - 10z^2 + 4xz + 3yz - 2x - y + 13z + 5$ функцияның төңіректік экстремумдарын табу керек.

Шешімі. Стационар нүктелерін табу үшін бірінші ретті дербес туындыларын нөлге теңестіреміз, яғни

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -2x + 4z - 2 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y + 3z - 1 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -20z + 4x + 3y + 13 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} -x + 2z = 1 \\ -2y + 3z = 1 \\ 4x + 3y - 20z = -13 \end{cases} \Rightarrow M_0(1, 1, 1).$$

Екінші ретті дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 4.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 3.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -20.$$

$$\text{Сонымен } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2 < 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -20 \end{vmatrix} = -30 < 0.$$

Сонымен (11.12) шарттар орындалды, сондықтан $M_0(1, 1, 1)$ нүктеде берілген функцияның төңіректік максимумы болады. $u_{\max}(1, 1, 1) = 10$.

ЕСКЕРТУ. Айқындалмаған $z = f(x, y)$ функциясы $F(x, y, z) = 0$ тендеуімен анықталсын. Онда осы тендеуден

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = 0 \Rightarrow F'_x(x, y, z) = 0, \quad F'_y(x, y, z) = 0.$$

Осы екі тендеуге бастапқы $F(x, y, z) = 0$ тендеуін біріктерсек, онда айқындалмаған функцияның экстремумы болуының қажетті шарттары ретінде мына жүйені алуға болады:

$$\left. \begin{aligned} F'_x(x, y, z) &= 0 \\ F'_y(x, y, z) &= 0 \\ F(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.14)$$

Ал жеткілікті шарттары үшін жоғарыдағы келтірілген формулаларды қолдануға болады.

Мысал 3. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ тендеуімен берілген $z = f(x, y)$ айқындалмаған функцияның төңіректік экстремумдарын табындар.

$$\text{Шешімі. } \begin{cases} F'_x = 2x - 2 = 0 \\ F'_y = 2y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1. \\ y = -1. \\ 1 + 1 + z^2 - 2 - 2 - 4z - 10 = 0. \end{cases}$$

$$z^2 - 4z - 12 = 0. \quad z_1 = -2, \quad z_2 = 6. \quad M_1(1, -1, 6) \quad M_2(1, -1, -2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

$$F'_x = 2x - 2, \quad F'_y = 2y + 2, \quad F'_z = 2z - 4, \quad z'_x = -\frac{2x - 2}{2z - 4} = -\frac{x - 1}{z - 2};$$

$$z'_y = -\frac{2y + 2}{2z - 4} = -\frac{y + 1}{z - 2}; \quad z''_{xx} = -\frac{z - 2 - (x - 1)z'_x}{(z - 2)^2} = -\frac{(z - 2)^2 + (x - 1)^2}{(z - 2)^3}.$$

$$z''_{xy} = -\frac{z'_y(x - 1)}{(z - 2)^2} = -\frac{(y + 1)(x - 1)}{(z - 2)^3}, \quad z''_{yy} = -\frac{(z - 2) - (y + 1)z'_y}{(z - 2)^2} = -\frac{(z - 2)^2 + (y + 1)^2}{(z - 2)^3},$$

$$z''_{xx}|_{M_1} = -\frac{16}{64} = -\frac{1}{4} < 0, \quad z''_{xy}|_{M_1} = -\frac{1}{4}, \quad z''_{yy}|_{M_1} = 0. \quad z''_{xx}|_{M_2} = \frac{1}{4}, \quad z''_{xy}|_{M_2} = \frac{1}{4}, \quad z''_{yy}|_{M_2} = 0.$$

$M_1(1, -1, 6)$ нүктеде $z''_{xx} < 0$, $|H| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{16} > 0$. Олай болса бұл нүктеде функцияның төңіректік максимум болады. $z_{\max} = 6$.

$M_2(1, -1, -2)$ нүктеде $z''_{xx} > 0$, $|H| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{16} > 0$. Сондықтан бұл нүктеде функцияның төңіректік минимумы болады, $z_{\min} = -2$.

§12. Шартты экстремумдар

Бірнеше айнымалы функцияның экстремумын іздеген кезде, *шартты*

экстремум деп аталатын есептер жиі кездеседі. Бұл ұғымды екі айнымалы функция үшін түсіндірейік.

Айталық, $z = f(x, y)$ функциясы және OXY жазықтығында жатқан L сызығы берілсін. Есептің шарты мынандай: $f(x, y)$ функциясының L сызықтың бойындағы мәндерінің төңіректік экстремум болатын M нүктесін табу керек. Осындай M нүктелер $f(x, y)$ функциясының L сызығының бойындағы шартты экстремум нүктелері деп аталады.

Егер жәй төңіректік экстремум нүктедегі функция мәні осы нүктенің қайсібір аймағындағы барлық нүктелеріндегі мәнімен салыстырылса, ол шартты экстремумда функция мәні тек M нүктеден өтетін L сызығындағы мәндерімен салыстырылады. Сондықтан, жәй төңіректік экстремум нүктесі осы нүктеден өтетін кез келген сызықтың шартты экстремум нүктесі болады. Ал кері тұжырым дұрыс емес, яғни шартты экстремум нүктесі төңіректік экстремум нүктесі болмауы мүмкін.

Берілген

$$z = f(x, y) \quad (12.1)$$

функциясының шартты экстремумын табу керек, егер x және y мына теңдік арқылы байланысқан болса

$$\phi(x, y) = 0. \quad (12.2)$$

Онда (12.1) функцияны *мақсатты функция* деп, ал (12.2) теңдеуді *байланыс теңдеуі* деп атайды.

а) Егер байланыс теңдеуінен y -ті x арқылы айқын түрде анықтай алсақ, яғни $y = \psi(x)$ онда осы функцияны (12.1) өрнектегі y -тің орнына қойсақ бір айнымалы функция аламыз

$$z = f(x, \psi(x)) = \phi(x)$$

Осы функцияның төңіректік экстремум болатын x нүктелерін тауып, содан кейін (12.2)-ден y -ті тауып іздеп отырған *шартты экстремум* нүктелерін табамыз.

б) Егер байланыс теңдеуі параметрлік теңдеулермен берілсе, яғни $x = x(t)$, $y = y(t)$ онда шартты экстремум есебі өте оңай шешіледі. x және y -тің өрнектерін берілген мақсатты функцияға қойып, тағы да бір айнымалы функция аламыз.

в) Егер байланыс теңдеуі күрделі болса, яғни бір айнымалыны екіншісі арқылы айқын түрде анықтай алмасақ немесе оны параметрлік теңдеулермен алмастыра алмасақ, онда шартты экстремум нүктелерін табу қиынға соғады. Бірақ қойылған есепті, байланыс теңдеуін y арқылы шешпейәк, шығаруға болады. (12.1) өрнектен, y -ті x -тің функциясы екендігін еске сақтап,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Ал экстремум нүктеде бұл туынды нөлге тең болу керек

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (12.3)$$

Ал (12.2) теңдеуден

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (12.4)$$

(12.4) теңдікті әзірше белгісіз λ коэффициентке көбейтіп және оны (12.3) теңдіктің сәйкес мүшелерімен қосып мынаны аламыз

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \right) = 0.$$

немесе

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0. \quad (12.5)$$

Соңғы теңдік экстремум болатын барлық нүктелер үшін орындалады. Белгісіз λ коэффициентті сондай етіп аламыз, (12.5) теңдіктегі екінші жақша нөлге тең болатындай етіп, сонымен

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Ал x және y -тің осындай мәнінде (12.5) теңдіктен мынандай теңдік шығады

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Сонымен экстремум нүктеде белгісіз x, y және λ үшін мына үш теңдеулер жүйесі орындалады

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \\ \varphi(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

Осы (12.6) теңдеулер жүйесінен x, y және λ -ны анықтаймыз. Бұл теңдеулер жүйесі *шартты экстремумның қажетті шарттары*. (12.6) теңдеулердің сол жағы

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \quad (12.7)$$

функцияның x, y және λ бойынша алынған дербес туындылары, яғни бұл теңдеулерді үш айнымалы $F(x, y, \lambda)$ функцияның төңіректік экстремум болуының қажетті шарттары деп түсіну керек. (12.7) функцияны Лагранж функциясы деп λ саны Лагранж көбейткіші деп, ал осы келтірілген әдіс Лагранж көбейткіші әдісі деп аталады. Бұл әдіс көп айнымалы функция үшін де дұрыс. n айнымалы $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияның төңіректік шартты экстремум нүктелерін табу керек болсын, егер $x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалылары m теңдеулер ($m < n$) арқылы байланысқан болса

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

Экстремум нүктелерін табу үшін Лагранж функциясын құрамыз

Осы функцияның $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ айнымалылары бойынша дербес туындыларын тауып оларды нөлге теңестіреміз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} &= 0 \\ \dots &\dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

Осы $(m+n)$ тендеулер жүйесінен $x_1, x_2, \dots, x_n$ және $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ белгісіздерді табамыз. Бұл (12.10) тендеулер жүйесі көп айнымалы функциясының экстремум нүктелерінің болуының қажетті шарттары.

Теорема. (12.1) және (12.2) теңдіктердегі f және φ функциялары $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ Лагранж функциясының (x_0, y_0, λ_0) стационар нүктесінде екі рет үзіліссіз дифференциалданатын болсын. Егер

$$\begin{cases} d^2 F(x_0, y_0, \lambda_0) < 0 \\ \phi(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d^2 F(x_0, y_0, z_0) > 0 \\ \phi(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases} \quad (12.11)$$

болса, онда (x_0, y_0) нүктеде $z = f(x, y)$ функцияның *төңіректік шартты максимумы (минимумы)* болады.

Дәлелдеуі. $f(x, y)$ және $\phi(x, y)$ функцияларын (x_0, y_0) нүктенің маңайында Тейлор формуласы арқылы өрнектейік. Онда

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) + o_1(\rho^2), \quad (12.12)$$

$$\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) = d\varphi(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^2\varphi(x_0, y_0) + o_2(\rho^2), \quad (12.13)$$

мұндағы $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o_1(\rho^2)}{\rho^2} = 0$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o_2(\rho^2)}{\rho^2} = 0$. (12.13) теңдікті

λ -ға көбейтіп (12.12) теңдікке қоссақ мына өрнекті аламыз:

$$F(x, y, \lambda) - F(x_0, y_0, \lambda_0) = dF(x_0, y_0, \lambda_0) + \frac{1}{2} d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) + o(\rho^2)$$

мұндағы $o(\rho^2) = o_1(\rho^2) + o_2(\rho^2)$ (x_0, y_0, λ_0) стационар нүктеде $dF(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$. Сондықтан

$$F(x, y, \lambda) - F(x_0, y_0, \lambda_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} d^2F(x_0, y_0) + o(\rho^2). \quad (12.14)$$

Мұндағы $F(x, y, \lambda) = f(x, y)$, $F(x_0, y_0, \lambda_0) = f(x_0, y_0)$ себебі $\varphi(x, y) = 0$, $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Осыдан теореманың шарты бойынша f және φ функциялардың екінші ретті дербес туындылары (x_0, y_0) нүктенің кейбір аймағында үзіліссіз болғандықтан осы аймақта $d^2F(x, y)$ -дің таңбасы $d^2F(x_0, y_0)$ -дің таңбасындай болады. Осы аймақты сондай етіп алуға болады $o(\rho^2)$ деген қосынды $d^2F(x_0, y_0)$ -ің таңбасына әсер етпейтіндей етіп. Онда (12.11)-дан $d^2F(x_0, y_0) < 0$ ($d^2F(x_0, y_0) > 0$) болса, онда $f(x, y)$ функциясы (x_0, y_0) нүктеде төңіректік шартты максимум (минимум) болады. Теорема дәлелденді.

Сонымен екінші ретті дифференциалды былай жазуға болады

$$d^2F = (dx, dy) \begin{pmatrix} F''_{xx}(M_0) & F''_{xy}(M_0) \\ F''_{xy}(M_0) & F''_{yy}(M_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \quad (12.15)$$

$\varphi(x, y) = 0$ байланыс теңдеуінен

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0 \Rightarrow dy = - \left(\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \right) dx.$$

Осы теңдікті (12.15)-ға қойсақ

$$\begin{aligned} d^2F &= \left(dx, -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} dx \right) \begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{pmatrix}_{M_0} \begin{pmatrix} dx \\ -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} dx \end{pmatrix} = dx^2 \left(1, -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \right) \begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{pmatrix}_{M_0} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \end{pmatrix} = \\ &= dx^2 \cdot (\varphi'_y)^2 (\varphi'_y - \varphi'_x) \begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{pmatrix}_{M_0} \begin{pmatrix} \varphi'_y \\ -\varphi'_x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12.16)$$

$dx^2 > 0$ және $(\varphi'_y)^2 > 0$ болғандықтан, шартты экстремумның жеткілікті шарттарын былай жазуға болады:

$$Q = (\varphi'_y - \varphi'_x) \begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{pmatrix}_{M_0} \begin{pmatrix} \varphi'_y \\ -\varphi'_x \end{pmatrix} \quad (12.17)$$

егер $M_0(x_0, y_0)$ нүктеде $Q > 0$ болса, шартты минимум, ал $Q < 0$ болса шартты

максимум болады.

Е С К Е Р Т У. Шартты экстремумының жеткілікті шарттарын дәлелсіз $\varphi_1(x, y, z) = 0$ және $\varphi_2(x, y, z) = 0$ байланыста болатын үш айнымалы $u = f(x, y, z)$ функция үшін келтірейік.

Егер $F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z)$ Лагранж функциясы үшін стационар $M_0(x_0, y_0, z_0, \lambda_1^0, \lambda_2^0)$ нүктеде

$$Q = \left(\left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(y, z)} \right|, \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, z)} \right|, \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} \right| \right) \begin{bmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ F''_{zx} & F''_{zy} & F''_{zz} \end{bmatrix}_{M_0} \begin{pmatrix} \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(y, z)} \right| \\ - \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, z)} \right| \\ \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} \right| \end{pmatrix} \quad (12.18)$$

матрицасы оң (теріс) анықталған болса, онда $u = f(x, y, z)$ функциясының $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінде төңіректік шартты минимумы (максимумы) болады. Мұндағы

$$\left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(y, z)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{vmatrix} \dots \text{Якобиандар деп аталады.}$$

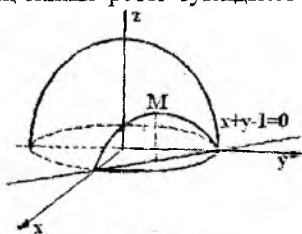
Көп жағдайларда функцияның шартты экстремум болуының жеткілікті шарттарын зерттемей максимум минимум болатындығын есептің маңнасынан анықтауға болады.

Мысал 1. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ функцияның $x + y - 1 = 0$ шартын қанағаттандыратын төңіректік шартты экстремум нүктесін табу керек.

Шешімі. Байланыс теңдеуінен y -ті x арқылы айқын түрде анықтай аламыз, яғни $y = 1 - x$, осы функцияны берілген өрнектегі y -тің орнына қойса бір айнымалыға байланысты $z = \sqrt{2x - 2x^2}$ функциясын аламыз. $x_0 = 0,5$ нүктесі осы функцияның төңіректік шартты максимум нүктесі болатындығын көрсетуге болады. Себебі осы нүктеде функцияның екінші ретті туындысы нөлден кіші.

Егер $x_0 = 0,5$ болса $x + y - 1 = 0$ теңдеуден $y_0 = 0,5$. Онда $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ функцияның $x + y - 1 = 0$ түзудің бойындағы шартты экстремум нүктесі $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ болады.

$$\lambda(M_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



69-сурет

Мысал 2. $z = xy$ функцияның төңіректік шартты экстремум нүктелерін табу керек, егер x және y оң және $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$ теңдеуімен байланысқан болса.

Шешімі. Бұл есепті Лагранж көбейткіш әдісі арқылы шешейік. Ол үшін Лагранж функциясын құрамыз

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda \left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right).$$

Осы функцияның x, y және λ айнымалылары арқылы алынған дербес туындыларын нөлге теңестіреміз

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y + \frac{\lambda x}{4} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x + \lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 4y + \lambda x = 0 \\ x + \lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \\ \lambda_0 = -2. \end{cases}$$

Есептің шарты бойынша x және y оң, сондықтан бірақ стационар нүктесін аламыз $M_0(2, 1, -1)$. Осы нүктедегі (12.17) шартты тексереміз.

$$\varphi'_x|_{M_0} = \frac{x}{4}|_{M_0} = \frac{1}{2}, \quad \varphi'_y|_{M_0} = 1, \quad F''_{xx}|_{M_0} = \frac{\lambda}{4}|_{M_0} = -\frac{1}{2}, \quad F''_{xy}|_{M_0} = 1, \quad F''_{yy}|_{M_0} = 1, \quad F''_{\lambda\lambda}|_{M_0} = -2;$$

$$Q = \begin{pmatrix} \varphi'_y & -\varphi'_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_y \\ -\varphi'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

$|Q| < 0$ олай болса, M_0 нүктеде функцияның шартты максимумы болады. $z_{\max}(M_0) = 2$.

Мысал 3. Ауданы $2a$ -ға тең қаңылтырдан көлемі оң үлкен болатын параллелепипед формадағы жабық жәшік жасау керек, яғни $u = xyz$ функцияның шартты максимумын табу керек, егер x, y және z айнымалылары оң және $2xy + 2xz + 2yz = 2a$ теңдеуімен байланысқан болса.

Шешімі. Лагранж функциясын құрамыз

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a)$$

Осы функцияның дербес туындыларын нөлге теңестіреміз

$$\left. \begin{aligned} F'_x &= yz + \lambda(y + z) = 0 \\ F'_y &= xz + \lambda(x + z) = 0 \\ F'_z &= xy + \lambda(x + y) = 0 \\ F'_\lambda &= xy + xz + yz - a = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt{\frac{a}{3}}, \quad \lambda_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

$$M_0 \left(\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}} \right)$$

Осы M_0 нүктеде функцияның максимум болатындығын көрсетейік.

Егер $u = f(x, y, z)$ функцияның x, y және z айнымалылары бір ғана теңдеумен $\phi(x, y, z) = 0$ байланысқан болса, онда оның шартты экстремумының жеткілікті шарты былай жазылады

$$Q = \begin{pmatrix} -\phi'_z & 0 & \phi'_x \\ 0 & -\phi'_z & \phi'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ F''_{xz} & F''_{zy} & F''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\phi'_z & 0 \\ 0 & -\phi'_z \\ \phi'_x & \phi'_y \end{pmatrix} \quad (12.19)$$

мұндағы $F(x, y, z, \lambda)$ Лагранж функциясы.

Егер Q матрицасы $M_0(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ стационар нүктеде оң (теріс) анықталса, онда $u = f(x, y, z)$ функциясы M_0 нүктеде төңіректік шартты минимумы (максимумы) болады. Сонымен берілген есеп үшін

$$F''_{xx} = 0, \quad F''_{xy}|_{M_0} = (z + \lambda)|_{M_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}, \quad F''_{xz}|_{M_0} = y + \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

$$F''_{yz}|_{M_0} = (z + \lambda)|_{M_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}, \quad F''_{yy}|_{M_0} = (x + \lambda)|_{M_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}, \quad F''_{yy} = 0, \quad F''_{zz} = 0.$$

$$\phi'_x|_{M_0} (y + z)|_{M_0} = 2\sqrt{\frac{a}{3}}, \quad \phi'_y|_{M_0} = 2\sqrt{\frac{a}{3}}, \quad \phi'_z|_{M_0} = 2\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\frac{a}{3}} & 0 & 2\sqrt{\frac{a}{3}} \\ 0 & -2\sqrt{\frac{a}{3}} & 2\sqrt{\frac{a}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sqrt{\frac{a}{3}} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{\frac{a}{3}} \\ 2\sqrt{\frac{a}{3}} & 2\sqrt{\frac{a}{3}} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\frac{a}{3}} & 0 & 2\sqrt{\frac{a}{3}} \\ 0 & -2\sqrt{\frac{a}{3}} & 2\sqrt{\frac{a}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{3} & 0 \\ 0 & \frac{a}{3} \\ -\frac{a}{3} & -\frac{a}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}} & -2\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \\ -2\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}} & -4\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \quad |Q| > 0.$$

Q матрицасы M_0 нүктеде оң анықталған, сондықтан осы нүктеде $u = xz$ функциясының шартты максимумы болады.

§13. Тұйық аймақтағы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

Егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы D тұйық аймақта анықталған, үзіліссіз және осы аймақтың ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болса, онда Вейерштрасс теоремасы бойынша осы аймақтың қайсібір нүктелерінде өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдайды. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін D аймақтың ішкі стационар нүктелердегі функцияның мәндерін және аймақтың шекарасындағы шартты экстремум нүктелердегі мәндерін салыстырып, олардың ішіндегі ең үлкенін функцияның ең үлкен мәні деп, ал ең кішісін функцияның ең кіші мәні деп аламыз.

Мысал. $z = 1 - x + x^2 + 2y^2 - y$ функцияның D : $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ аймақтағы ең үлкен және ең кіші мәнін табу керек.

Шешімі. Функцияның төңіректік экстремум нүктелерін табу үшін оның дербес туындыларын нөлге теңестіреміз

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -1 + 2x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = \frac{1}{4}.$$

Сонымен D аймақтың ішкі нүктелерінде тек қана бір ғана $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ стационар нүкте бар. Бұл нүктеде функцияның мәні $z(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{5}{8}$ тең.

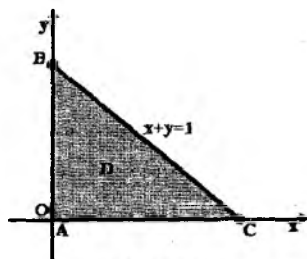
Экстремумның жеткілікті шартынан бұл нүктеде функцияның төңіректік минимум екендігін анықтауға болады. Бірақ бізге оны анықтаудың қажеті жоқ.

а) $z = 1 - x + x^2 + 2y^2 - y$ функцияның AC шекарадағы шартты төңіректік экстремум нүктелерін табу керек.

$y=0$ тендеуді функциядағы y -тің орнына қойып $z = 1 - x + x^2$ функциясын аламыз. Осы функцияның $[0,1]$ кесіндідегі экстремум нүктелерін табу үшін оның x бойынша туындысын нөлге теңестіреміз және кесіндінің соңғы нүктелердегі мәндерін табамыз.

$$\frac{dz}{dx} = -1 + 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad M_1(\frac{1}{2}, 0) \quad z(\frac{1}{2}, 0) = \frac{3}{4}.$$

$$M_2(0, 0) \quad z(0, 0) = 1, \quad M_3(1, 0) \quad z(1, 0) = 1.$$



70-сурет

б) Енді $z = 1 - x + x^2 + 2y^2 - y$ функцияның AB шекарадағы шартты төңіректік экстремум нүктелерін табайық. Ол үшін $x=0$ тендеуді функциядағы x -тің орнына қойамыз. Онда $z = 1 + 2y^2 - y$ функциясын аламыз. Осы функцияның $[0,1]$ кесіндідегі экстремум нүктелерін табу керек

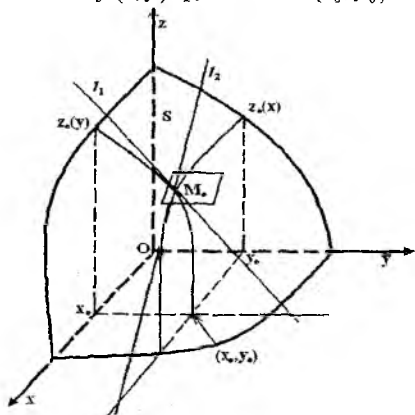
$$\frac{dz}{dy} = 4y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}, \quad M_4(0, \frac{1}{4}) \quad z(M_4) = \frac{7}{8}, \quad M_5(0, 1) \quad z(M_5) = 2.$$

в) $z = 1 - x + x^2 + 2y^2 - y$ функцияның BC шекарадағы шартты төңіректік экстремум нүктелерін табайық. $x+y=1$ байланыс тендеуінен $y=1-x$ -ті функциядағы y -тің орнына қойып бір айнымалыға байланысты функция аламыз $z = 2 - 4x + 3x^2$.

$\frac{dz}{dx} = -4 + 6x = 0, \quad x = \frac{2}{3}$; Олай болса $y = \frac{1}{3}, M_6(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ Бұл нүктедегі функцияның мәні $z(M_6) = \frac{2}{3}$ тең. Сонымен $z(M_0) = \frac{5}{8}, \quad z(M_1) = \frac{3}{4}, \quad z(M_2) = 1, \quad z(M_3) = 1,$
 $z(M_4) = \frac{7}{8}, \quad z(M_5) = 2, \quad z(M_6) = \frac{2}{3}$. Осыдан D облысында $z_{\max} = 2, \quad z_{\min} = \frac{5}{8}$.

§14. Беттің жанама жазықтығы және нормалі

$z = f(x, y)$ функциясы $(x_0, y_0) \in D$ нүктеде дифференциалданатын болсын.



71-сурет

жанама түзуін жүргіземіз. l_1 және l_2 түзулері S беттің $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ нүктедегі жанама жазықтығын анықтайды.

Осы жазықтықтың теңдеуін құрайық.

$M(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеуі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Бұл теңдеуді мына түрде жазайық:

$$z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) \quad (14.1)$$

мұндағы $A_1 = -\frac{A}{C}$, $B_1 = -\frac{B}{C}$.

Енді осы A_1 мен B_1 -лерді табайық. l_1 және l_2 жанама түзулердің теңдеулері

$$l_1: z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad x = x_0$$

$$l_2: z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0), \quad y = y_0.$$

l_1 түзу жанама жазықтықта жатқандықтан, оның барлық нүктелері (14.1) теңдеуін қанағаттандырады, яғни

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0, \\ z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) \end{cases}$$

осы теңдеулер жүйесінен B_1 табамыз, $B_1 = f'_y(x_0, y_0)$. Тура осылай пайымдай отырып l_2 түзу үшін $A_1 = f'_x(x_0, y_0)$ екендігін дәлелдеуге болады.

A_1 және B_1 мәндерін (14.1)-ге қойып жанама жазықтық теңдеуін аламыз.

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (14.2)$$

S беттің $M(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен өтетін және жанама жазықтыққа перпендикуляр түзуді осы беттің нормалі деп атайды.

Нормальдың теңдеуі (14.2) теңдеуден шығады

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1} \quad (14.3)$$

Егер S беті $F(x, y, z) = 0$ теңдеуімен берілсе, яғни айқындалмаған түрде, онда (14.2) мен (14.3) сәйкес

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0 \quad (14.4)$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \quad (14.3)$$

түрінде болады.

Мысал. $z = 2x^2 + y^2$ беттің $M_0(1, -1, 3)$ нүктедегі жанама жазықтықтың және нормальдың теңдеулерін жазу керек.

Шешімі: $z'_x = 4x|_{(1,-1)} = 4$, $z'_y = 2y|_{(1,-1)} = -2$, (14.2) мен (14.3) формулаларды пайдаланып жанама жазықтықтың теңдеуі: $z-3 = 4(x-1) - 2(y+1)$ немесе $4x - 2y - z - 3 = 0$ және нормальдың теңдеуі: $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$.

§15. Скалярлық өріс. Бағыт бойынша туынды. Градиент.

1. Скалярлық өріс ұғымы.

D аймақтың әрбір P нүктесінде u физикалық шаманың скалярлық мәні берілсін. Мысалы, бұл дененің әрбір нүктедегі температурасы, біртекті дененің тығыздығы болуы мүмкін т.б. Онда u нүктелердің скалярлық шамасы деп аталады.

Анықтама. Егер D аймағында скалярлық $u(p)$ функциясы берілсе, онда осы аймақта скалярлық өріс берілді дейді. Егер u функциясы t уақытына байланысты болмаса, онда өрісті стационарлы, ал уақытқа байланысты болса, онда өрісті стационарлы емес дейді.

Егер физикалық шама вектор болса, онда өрісті векторлық өріс деп атайды. Мысалы, векторлық өріс, жылдамдық, кернеудің электрлік өрісі, магнитті өріс. Егер скалярлық өріс үш өлшемді кеңістікте берілсе, онда $u(p) = u(x, y, z)$ үш айнымалының функциясы болады.

Анықтама. Беттік деңгейі деп, u функциясының мәндері тұрақты болатын нүктелердің геометриялық орнын айтады, яғни

$$u(x, y, z) = C \quad (const) \quad (15.1)$$

Берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте арқылы өтетін, беттік деңгейдің теңдеуі мына түрде жазылады

$$u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0) \quad (15.2)$$

Егер скалярлық өрісі жазық болса, онда u функциясы екі айнымалыға байланысты болады. Онда осы өрістің сызықтық деңгейінің теңдеуі мынадай

$$u(x, y) = C \quad (const) \quad (15.3)$$

2. Бағыт бойынша туынды. $u(x, y, z)$ скалярлық өріс берілсін. Осы өрістен $P(x, y, z)$ нүктесін алайық және осы нүктеден шығатын λ сәулесін жүргізейік (72-сурет). Осы сәуленің бағытын α, β, γ бұрыштары арқылы береміз, бұл бұрыштар ox, oy және oz осімен жасайтын бұрыштар.

Осы сәуленің бірлік векторы тең:

$$\vec{e}_\lambda = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ нүкте осы сәуленің бойында

жатсын. PP_1 ұзындығын ρ деп белгілейік. $\overline{PP_1}$ вектордың ось координаттағы проекциясы бір жағынан $\rho \cos \alpha, \rho \cos \beta, \rho \cos \gamma$ -ға тең, ал екінші жағынан $x_1 - x, y_1 - y$ және $z_1 - z$ -ге тең. Олай болса

$$x_1 = x + \rho \cos \alpha, \quad y_1 = y + \rho \cos \beta, \quad z_1 = z + \rho \cos \gamma \quad (15.4)$$

Енді u функцияның P нүктеден P_1 -ге өткендегі өсімшесін қарастырайық.

$$u(p_1) - u(p) = u(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \cos \beta, z + \rho \cos \gamma) - u(x, y, z) \quad (15.5)$$

Егер λ сәуленің бойында P нүктесі өзінің орнын ауыстырса, онда (15.5)-тегі тек ρ -ның ғана шамасы өзгереді.

$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(p_1) - u(p)}{\rho}$ шекті u функцияның λ бағыттағы P нүктедегі туындысы

деп атайды да $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ деп белгілейді. Бұл шек P нүктеге және λ сәуленің бағытына байланысты.

Теорема. Егер $u(x, y, z)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда оның кез келген λ бағыттағы туындысы $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ бар және ол мынаған тең

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (15.6)$$

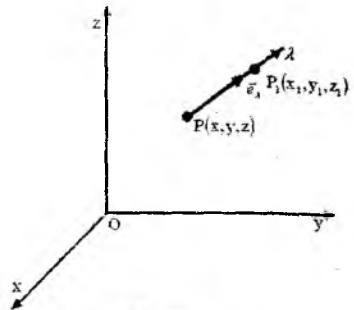
мұндағы $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - λ сәуленің бағыттауыш косинустары.

Дәлелдеуі. $u(x, y, z)$ функциясы дифференциалданатын болғандықтан оның толық өсімшесін былай жазуға болады:

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + o(\rho) \quad (15.7)$$

мұндағы $o(\rho)$ шама, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ шамаға қарағанда жоғарғы ретті шексіз аз шама, яғни $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$. (15.5) формуладан $\Delta x = \rho \cos \alpha, \Delta y = \rho \cos \beta, \Delta z = \rho \cos \gamma$

тең. Олай болса



72-сурет

$$u(p_1) - u(p) = \frac{\partial u}{\partial x} \rho \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \rho \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \rho \cos \gamma + o(\rho) \quad (15.8)$$

теңдіктің екі жағын ρ -ға бөліп $\rho \rightarrow 0$ ұмтылдырамыз.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(p_1) - u(p)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Егер $\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, онда $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}$, егер $\beta = 0, \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial y}$, егер $\gamma = 0, \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Мысал. $u = xyz$ функциясының P нүктедегі және $\overline{PQ}$ бағыттағы туындысын табу керек, егер $P(5, 1, 2), Q(7, -1, 3)$ болса.

Шешімі: $\overline{PQ} = (2, -2, 1)$. Осы вектордың бірлік векторы

$$\vec{e} = \frac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|} = \frac{(2, -2, 1)}{\sqrt{4+4+1}} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{1}{3}.$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P = yz|_P = 1 \cdot 2 = 2, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P = xz|_P = 5 \cdot 2 = 10, \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P = xy|_P = 5 \cdot 1 = 5, \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{5}{3} = -\frac{11}{3}.$$

3. Градиент. $u(x, y, z)$ функциясының градиенті деп, проекциялары осы функцияның дербес туындылары болатын векторды айтады, яғни

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad (15.9)$$

Мысалы. $u = ax + by + cz + d$ сызықты функцияның градиенті тұрақты вектор: $\text{gradu} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Енді бағыт бойынша алынған туындыны былай жазуға болады

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \text{gradu} \cdot \vec{e}, \quad (15.10)$$

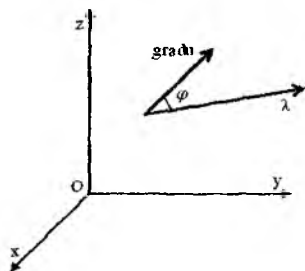
Бұл шама градиент пен бірлік вектордың скалярлық көбейтіндісі, слай болса

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = |\text{gradu}| \cos \varphi \quad (15.11)$$

Мұндағы φ, λ сәуле мен gradu -дың арасындағы бұрыш. (72-сурет).

Осы формуладан, $\varphi = 0$ болғанда, градиент бағыт бойынша алынған туынды ең үлкен мәнді қабылдайды,

$$|\text{gradu}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$



72-сурет.

Теорема. $u(x, y, z)$ функциясының әрбір нүктедегі градиентінің бағыты осы нүкте арқылы өтетін скалярлық өрістің деңгейлік бетінің нормалымен бағыттас болады.

Дәлелдеуі. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте арқылы өтетін беттік деңгейдің теңдеуі мына түрде жазылады: $u(x, y, z) = u_0$, ($u_0 = u(x_0, y_0, z_0) = u(p_0)$). (74-сурет).

p_0 нүкте арқылы өтетін беттік деңгейдің нормалінің теңдеуі мынаған тең:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{p_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{p_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{p_0}} \quad (15.12)$$

Себебі $u(x, y, z) = u_0$ беттің P_0 нүктедегі жанама жазықтықтың теңдеуі

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{p_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{p_0} (y - y_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{p_0} (z - z_0) = 0 \quad (15.13)$$

Осы жазықтықтың нормалінің координаттары

$$\vec{N} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{p_0}, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{p_0}, \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{p_0} \right] = \text{grad}(p_0) \quad (15.14)$$

Сонымен (15.12) түзудің бағыттауыш векторы $u(x, y, z)$ функциясының P_0 нүктедегі градиенті болады.

Сондықтан беттік деңгейдің әрбір нүктесіндегі градиенттерінің бағыты, осы нүктелер арқылы жүргізілген жанама бетке перпендикуляр болады.

Градиенттің кейбір қасиеттері:

1. $\text{grad}(u_1 + u_2) = \text{grad}u_1 + \text{grad}u_2$.
2. $\text{grad}(Cu_1) = C\text{grad}u_1$, $C = \text{const}$.
3. $\text{grad}(u_1 \cdot u_2) = u_2\text{grad}u_1 + u_1\text{grad}u_2$.

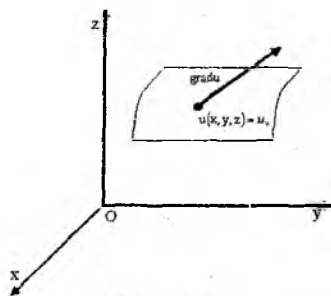
Дәлелдеуі.

$$\begin{aligned} \text{grad}(u_1 \cdot u_2) &= \frac{\partial(u_1 \cdot u_2)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(u_1 \cdot u_2)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(u_1 \cdot u_2)}{\partial z} \vec{k} = u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \vec{k} \right) + \\ &+ u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \vec{k} \right) = u_2 \text{grad}u_1 + u_1 \text{grad}u_2 \end{aligned}$$

$$4. \text{grad}f(u) = f'(u) \text{grad}u$$

Дәлелдеуі.

$$\begin{aligned} \text{grad}f(u) &= \frac{\partial}{\partial x} [f(u)] \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} [f(u)] \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} [f(u)] \vec{k} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \\ &= f'(u) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right] = f'(u) \text{grad}u. \end{aligned}$$



74-сурет

IV тарау. Комплекс сандар.

§1. Негізгі ұғымдар

Алгебралық түрдегі комплекс сан деп $z = x + iy$ түріндегі өрнекті айтады, мұндағы x және y нақты сандар, ал i жорымал бірлік деп аталады, $i^2 = -1$. Егер $x = 0$, онда $0 + iy = iy$ саны таза жорымал, егер $y = 0$, онда $x + i0 = x$ саны комплекс санның нақты бөлігі деп аталады. Комплекс сандар жиыны C арқылы белгіленеді, онда $R \subset C$, яғни барлық нақты сандар жиыны барлық комплекс сандар жиынының ішкі жиыны болады. $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ деп белгіленеді.

Комплекс сандар үшін теңдік, қосу және көбейту операциялары былай анықталады:

1) $z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ екі комплекс сандар бір-біріне тең сонда ғана, егерде $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ болса, яғни $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$; $x_2 + iy_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $y = 0$.

2) $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

3) $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

Айырмашылығы тек жорымал бөлігінің таңбасында ғана $z = x + iy$ және $z = x - iy$ екі комплекс сандарды *өзара түйіндес* деп атайды. $\sqrt{x^2 + y^2}$ санын $z = x + iy$ комплекс санның *модулі* деп атайды да $|z|$ деп белгілейді, яғни $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Қосу және көбейту амалдары үшін коммутативтік, ассоциативтік және дистрибутивтік қасиеттер орындалады:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

3) $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

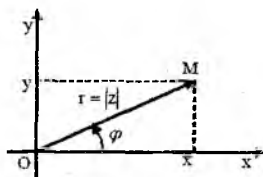
4) Бөлу амалы көбейту амалына кері амал ретінде анықталады, яғни $z = \frac{z_2}{z_1}$,

егерде $z_1 \cdot z = z_2$ болса. Сонымен

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \frac{(x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1)}{(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Бөлшектің алымында, бөлімінде $x_1 - iy_1$ -ге көбейтіп комплекс санның нақты және жорымал бөліктерін таптық

§2. Комплекс сандардың геометриялық кескіні



75-сурет

Кез келген $z = x + iy$ комплекс санын (к.с.) жазықтықтың $M(x, y)$ нүктесі арқылы кескіндеуге болады. Керісінше oxy жазықтықтың әрбір $M(x, y)$ нүктесін $z = x + iy$ комплекс санының бейнесі деп қарастыруға болады. Комплекс сандарды кескіндейтін жазықтық *комплекс жазықтық* деп аталады.

Абсцисса өсі нақты өс деп аталады, себебі бұл өсте $z = x + 0i = x$ нақты сандар жатады. Ординат осі *жорымал ось* деп аталады, бұл осьте $z = 0 + iy = iy$ таза жорымал сандар жатады. $z = x + iy$ комплекс санын $\vec{r} = \overline{OM} = (x; y)$ радиус вектор арқылы да өрнектеуге болады. $\vec{r}$ вектордың ұзындығы z комплекс санның модулі деп аталады да, $|z|$ немесе r деп белгіленеді, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Нақты остің оң бағытымен $\vec{r}$ вектордың арасындағы бұрыштың шамасы комплекс санның аргументі деп аталады да, $\arg z$ немесе φ деп белгіленеді.

$z = 0$ комплекс санның аргументі анықталмаған. $z \neq 0$ комплекс санның аргументі көп мәнді шама, ол $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) дәлдікпен анықталады, яғни $\text{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, мұндағы $\arg z$ - аргументтің бас мәні, $-\pi < \arg z \leq \pi$.

74-суреттен $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, осыдан

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2.1)$$

мұндағы $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arg z$. (2.1) түрдегі комплекс сандарды тригонометриялық түрдегі комплекс сандар деп аталады.

$-\pi < \arg z \leq \pi$ болғандықтан, $\arg z = \frac{y}{x}$ формуладан:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{егер } x > 0, I, IV \text{ ширекте} \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{егер } x < 0, y \geq 0, II \text{ ширекте} \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{егер } x < 0, y < 0, III \text{ ширекте} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x = 0, y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0, & x > 0, y = 0 \text{ болса.} \\ \pi, & x < 0, y = 0 \text{ болса.} \end{cases}$$

Мысал. $z = -1 + i$ комплекс санды тригонометриялық түрде жаз.

Шешімі. $|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. $\varphi = \pi + \arctg\left(\frac{1}{-1}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Сондықтан $-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

§3. Комплекс санның көрсеткіштік түрі

Егер $|z| = r = 1$ болса, онда (2.1)-ден $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ болады. $\cos \varphi + i \sin \varphi$ санын $e^{i\varphi}$ символымен, ал $\cos \varphi - i \sin \varphi$ комплекс санын $e^{-i\varphi}$ символымен белгілеп

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \end{cases} \quad (3.1)$$

өрнектерін аламыз. Бұл формулалар Эйлер формулалары деп аталады.

$$\arg e^{i\varphi} = \varphi, |e^{i\varphi}| = 1, \arg e^{-i\varphi} = -\varphi, |e^{-i\varphi}| = 1.$$

(3.1)-ден

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \quad (3.2)$$

(3.2)-ні (2.1)-ге қойсақ

$$z = re^{i\varphi} \quad (3.3)$$

мұндағы $z = |z|$, $\arg z = \varphi$. (3.3) формула комплекс санның көрсеткіші түрі деп аталады.

$e^{i\varphi}$ функцияның мынандай қасиеттері бар.

$$1. e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

$$2. \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$3. e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi} \cdot \dots \cdot e^{i\varphi} = e^{in\varphi}$$

Бірінші қасиеттің дәлелдеуін көрсетейік, қалғандары да солай дәлелденеді.

Дәлелдеуі:

$$1. e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ және $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ екі комплекс сандары берілсін. Мұндағы $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$, $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$. 1-ші және 2-ші қасиеттерден

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (3.4)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (3.5)$$

$$(3.4) \text{ және } (3.5) \text{ формулалардан } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, $\arg(z_1 / z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$. Екі комплекс сандарды көбейткенде олардың модульдері көбейтіледі де аргументтері қосылады. Екі комплекс сандарды бөлгенде олардың модульдері бөлінеді де, аргументтері алынады. $z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, яғни

$$z^n = [r(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (3.6)$$

(3.6) формуланы Муаврдың формуласы деп атайды.

§4. Комплекс санның түбір табу

n -ші дәрежелі түбір табу натурал дәрежеге шығаруға кері амал ретінде анықталады.

Анықтама. z комплекс санның n дәрежелі түбірі деп $w^n = z$ болатын w санын айтады, яғни $\sqrt[n]{z} = w$, егер $w^n = z$ болса

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$, $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$ деп алсақ, онда

$z = w^n \Rightarrow re^{i\varphi} = \rho^n e^{in\theta} \Rightarrow r = \rho^n$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ болады.

Осыдан $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\theta_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$.

Сонымен $w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{z} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$, немесе

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.1)$$

Косинус пен синустың периодтылығынан w -ның тура n әртүрлі мән қабылдайтындығын дәлелдеуге болады.

Мысал. $\sqrt[3]{1}$ мәнін табу керек.

Шешімі. Түбір астындағы өрнекті тригонометриялық түрге келтірейік.
 $z = 1 + 0 \cdot i$, $x = 1$, $y = 0$, $\varphi = 0$.

$z = 1 = \cos 0 + i \sin 0$, $w_k = (\sqrt[3]{1})_k = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

$k = 0$ болғанда $w_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$.

$k = 1$ болғанда $w_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$k = 2$ болғанда $w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

§5. Түйіндес комплекс сандардың қасиеттері

$z = x + iy = re^{i\varphi}$, $\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$ берілсін. Онда мына қасиеттер дұрыс.

1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; 2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; 3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $\bar{z}_2 \neq 0$; 4) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Екінші қасиетті дәлелдейік, қалғандары тура осылай дәлелденеді.

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}} = r_1 r_2 e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$\bar{z}_1 = r_1 e^{-i\varphi_1}$, $\bar{z}_2 = r_2 e^{-i\varphi_2}$, $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = r_1 r_2 e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, олай болса $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

5-қасиет. Егер z_0 комплекс саны $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ көпмүшеліктің түбірі болса, онда осы санға түйіндес $\bar{z}_0$ саны да осы көпмүшеліктің түбірі болады ($a_0, a_1, \dots, a_n$ - нақты сандар).

Дәлелдеуі. Түйіндес комплекс сандардың қасиеттері бойынша

$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \overline{a_0 (z^n)} + \overline{a_1 (z^{n-1})} + \dots + \overline{a_{n-1} z} + \overline{a_n} = a_0 (\bar{z})^n + a_1 (\bar{z})^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{z} + a_n = P_n(\bar{z})$. Осыдан, егерде $P_n(z_0) = 0$

болса, онда $\overline{P_n(z)} = P_n(\overline{z_0}) = 0$. Сонымен z_0 саны $P_n(z)$ түбірі болса, онда $\overline{z_0}$ саны да $P_n(z)$ -тің түбірі болады.

§6. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеу

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (6.1)$$

n -ші дәрежелі көпмүше берілсін. Мұндағы $a_0, a_1, \dots, a_n$ - тұрақты нақты сандар.

Теорема 1. Егер x_1 саны $P_n(x)$ көпмүшенің түбірі болса, онда бұл көпмүше $x - x_1$ -ге қалдықсыз бөлінеді, яғни

$$P_n(x) = (x - x_1) P_{n-1}(x), \quad (6.2)$$

мұндағы $P_{n-1}(x)$ - $(n-1)$ дәрежелі көпмүше.

Теорема 2. (алгебраның негізгі теоремасы). Кез келген n -ші дәрежелі ($n > 0$) көпмүшенің кем дегенде бір нақты немесе комплекс түбірі бар.

(Бұл теоремаларды дәлелдемейміз).

Салдар. $P_n(x)$ көпмүшенің тура n түбірі болады, еселігін ескергенде, яғни бұл көпмүшені былай жазуға болады

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m}, \quad (6.3)$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n,$$

мұндағы $x_0, x_1, \dots, x_m$ сандар $P_n(x)$ көпмүшелігінің түбірлері, еселіктері сәйкес $k_1, k_2, \dots, k_m$.

Түйіндес комплекс санның 5-ші қасиеті бойынша, егер $P_n(x)$ көпмүшелігінің $a + ib$ комплекс түбірі болса, онда $a - ib$ комплекс саны да осы көпмүшенің түбірі болады. Сондықтан (6.3) жіктеуінде комплекс түбірлер жұбымен болады, осыдан

$$(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = x^2 + px + q$$

$$p = -2a, \quad q = a^2 + b^2.$$

Сонымен $P_n(x)$ көпмүшенің комплекс түбірлері болса, онда (6.3) жіктеуіндегі түйіндес түбірлердің көбейтіндісін коэффициенттері нақты квадрат үшмүшелікпен алмастыруға болады. Қорытындысында $P_n(x)$ көпмүшелікті былай жіктеуге болады:

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + p_2)^{s_1} \dots (x^2 + p_m x + p_m)^{s_m} \quad (6.4)$$

$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_m) = n$, барлық квадрат үшмүшеліктердің нақты түбірлері жоқ.

Мысалдар. 1) $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.

2) $x^3 - 16x = x(x - 4)(x + 4)$.

3) $x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9 = (x - 1)(x - 3)^2(x^2 + x + 1)$.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. (Бірінші бөлім) Алматы: Мектеп, 1987.
2. Байбазаров М.А., Ершібаева Ө.Д. Дифференциалдық және интегралдық есептеулер. Алматы, Білім, 1995.
3. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. 1-бөлім. 2-бөлім. Алматы, 2000.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М: Наука, 1984.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.Наука, 1980.
6. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. ч.1. Минск: В.Ш., 1984.
7. Шипачев В.С. Основы высшей математики. В.Ш., 1989.
8. Писменный Д. Высшая математика. Первый курс. 100 экзаменационных ответов. Москва, 1999.
9. Қазақша-орысша. Орысша-қазақша терминологиялық сөздік. Математика, Рауан баспасы. Алматы, 1999.
10. Тоқбергенов Д.Б., Урстемова Г.К. Жоғары математика. Алматы. 2004. Қаз.ККА баспасы.

I тарау. СЫЗЫҚТЫ АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ НЕГІЗДЕРІ	4
§1. Екінші ретті анықтауыштар	4
§2. Үшінші және n-ші ретті анықтауыштар	5
§3. Минорлар мен алгебралық толықтауыштар	7
§4. Матрицалар және оларға қолданылатын амалдар	9
§5. Кері матрицалар	13
§6. Матрицаның рангісі	15
§7. Сызықты тендеулер жүйесі	16
§8. Крамер әдісі	17
§9. Сызықты тендеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешу	19
§10. Біртекті тендеулер жүйесі	21
§11. Векторлар және векторларға қолданылатын сызықтық амалдар	22
§12. Векторлардың проекциялары	24
§13. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі	26
§14. Векторлардың сызықты тәуелділігі	26
§15. Координаттары берілген векторларға қолданылатын сызықтық амалдар	28
§16. Векторлардың коллинеарлық және ортогоналдық болу шарттары	30
§17. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу	32
§18. Векторлардың векторлық көбейтіндісі және оның қасиеттері	33
§19. Векторлардың аралас көбейтіндісі және оның қасиеттері	34
§20. Координаттары берілген векторлардың векторлық және аралас көбейтінділері	36
§21. Үш өлшемді кеңістіктегі жазықтықтың тендеулері	38
§22. Берілген нүктеден өтетін жазықтықтың тендеуі	40
§23. Үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың тендеуі	40
§24. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш	41
§25. Нүктеден жазықтыққа дейінгі ара қашықтық	42
§26. Үш өлшемді кеңістіктегі түзудің тендеулері	43
§27. Түзулердің арасындағы бұрыш	45
§28. Жазықтықтағы түзудің тендеулері	46
§29. Екінші ретті қисық сызықтар	49
§30. Екінші ретті қисық сызықтың жалпы тендеуін канондық түрге келтіру	53
§31. Кеңістіктегі беттердің тендеулері	54
II тарау. МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАМҒА КІРІСПЕ	60
§1. Жиын ұғымы. Логикалық символдар	60
§2. Жиындарға қолданылатын амалдар	61
§3. Математикалық индукция әдісі. Ньютон биномының формуласы. Бернулли теңсіздігі.	62
§4. Нақты сандар жиыны	63

§5. Сан аралықтары. Шенелген жиындар.	66
§6. Супремум мен инфимум	67
§7. Шектер теориясы	68
§8. Бір айнымалы функциялар	79
§9. Функцияның шегі	83
§10. Біржақты шектер	84
§11. Шегі бар функциялардың қасиеттері	85
§12. Ақырсыз үлкен және ақырсыз кішкене функциялар	86
§13. Үзіліссіз функциялар	87
§14. Функцияның бірінші және екінші текті үзіліс нүктелері	89
§15. Тамаша шектер	90
§16. Функцияларды салыстыру	93
§17. Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері	95
§18. Туынды	98
§19. Қарапайым элементарлық функциялардың туындысы	100
§20. Дифференциалдаудың негізгі ережелері	101
§21. Негізгі туындылардың кестесі	104
§22. Туындының геометриялық мағынасы	105
§23. Функцияның дифференциалы	106
§24. Дифференциалды жуықтап есептеулерде қолдану	108
§25. Жоғарғы ретті туындылар	109
§26. Параметрлік түрде берілген функцияның туындысы	111
§27. Айқындалмаған функцияның туындысы	111
§28. Жоғарғы ретті дифференциалдар	112
§29. Функцияның төңіректік экстремумы	113
§30. Лопиталь ережесі	117
§31. Тейлор формуласы	119
§32. Тейлор формуласындағы Лагранж қалдық мүшесі	121
§33. Негізгі элементар функцияларды Тейлор (Маклорен) формуласы арқылы жіктеу	122
§34. Шектерді Тейлор формуласы арқылы есептеу	123
§35. Дифференциалданатын функциялардың тұрақтылығы, өсуі және кемуі	124
§36. Функцияның төңіректік экстремумының қажетті және жеткілікті шарттары	125
§37. Функцияның дөңестігі және ойыстығы. Иілу нүктелері.	129
§38. Функцияның графигінің асимптоталары	131
§39. Функцияның графигін салудың жалпы жобасы	132

ІІІ тарау. КӨП АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР 134

§1. Көп айнымалы функцияның негізгі ұғымдары	134
§2. Көп айнымалы функцияның үзіліссіздігі	135
§3. Функцияның дербес және толық өсімшелері. Дербес туындылар	136
§4. Көп айнымалы функцияның дифференциалдануы	138
§5. Көп айнымалы функцияның толық дифференциалы	139

§6. Күрделі функцияның туындысы	140
§7. Жоғары ретті дербес туындылар және дифференциалдар	142
§8. Көп айнымалы функцияның Тейлор формуласы	143
§9. Айқындалмаған функцияның туындылары	145
§10. Көп айнымалы функцияның экстремумдары	147
§11. Гессе матрицасы	149
§12. Шартты экстремумдар	153
§13. Тұйық аймақтағы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері	160
§14. Беттің жанама жазықтығы және нормалі	162
§15. Скалярлық өріс. Бағыт бойынша туынды. Градиент.	163

IV тарау. КОМПЛЕКС САНДАР. 167

§1. Негізгі ұғымдар	167
§2. Комплекс сандардың геометриялық кескіні	167
§3. Комплекс санның көрсеткіштік түрі	168
§4. Комплекс саннан түбір табу	169
§5. Түйіндес комплекс сандардың қасиеттері	170
§6. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеу	171

Пайдаланылған әдебиеттер	172
--------------------------	-----

Теруге 24.12.10. Басуға 29.12.10. кол қойылды.
Пішімі 60x84 1/16. Көлемі 10,2 баспа табағы.
Таралымы 200 дана. Тапсырыс № 4905

Алматы технологиялық университетінің баспа бөлімі
050012, Алматы қ, Төле би, 100